

第 1 章 测量误差与数据处理

物理实验离不开对物理量进行测量,由于人们认识能力和科学技术水平的限制,使得物理量的测量很难完全准确。也就是说,一个物理量的测量值与其客观存在的值总有一些差异,即测量总存在着误差。由于误差的存在,使得测量结果带有一定的不确定性,因此,对一个测量质量的评估,要给出它的不确定度。这是本章要介绍的前一部分内容。对物理量的测量结果总是用一组数字来表示,这涉及物理实验中经常遇到的很重要但又易被忽视的有效数字问题。做完一个实验必定要获得一些测量数据,如何对这些原始数据进行处理,得到实验结果,并给出误差或不确定度,就要使用一些科学的方法。本章后一部分内容,就要介绍有效数字及物理实验中常用的几种数据处理方法,如列表算法、作图法和线性回归法等。

1.1 测量与误差

1.1.1 测量及其分类

测量是将被测物理量与选作标准单位的同类物理量进行比较的过程,即以确定量值为目的的一组操作。其比值即为被测物理量的测量值,被测量的测量结果用标准量的倍数和标准量的单位来表示。因此,测量的必要条件是被测物理量、标准量及操作者。测量结果应是一组数字和单位,必要时还要给出测量所用的量具或仪器、测量的方法及条件等。例如,测量一个小钢球的直径,选用的标准单位是毫米,测量结果是毫米的 10.508 倍,则直径的测量值为 10.508 mm,使用的量具为螺旋测微计,测量环境温度为 18.5 °C。

作为比较标准的测量单位其大小是科学地人为规定的,以某几个选定的基本单位为基础,就能推导出一系列导出单位,这一系列基本单位和导出单位的整体叫做单位制。物理实验中一律采用国际单位制。

如果被测物理量与作为测量标准的量可以直接进行比较得到结果,或用预先按标准校对好的测量工具或仪表对被测量进行测量,通过测量能直接得到被测量值的叫做直接测量,相应的被测量称为直接测量量。例如,用钢直尺测量钢丝的长度,用天平和砝码称衡铜柱的质量,用停表计时,用电流表测量线路中的电流等。

但是,更多的物理量不能找到单一的可与其直接比较的标准量,例如,物体的密度,某地的重力加速度等。如果被测物理量不能用直接测量的方法得到,而是通过对与被测量有已知函数关系的其它直接测量量的测量,由函数关系式计算得到被测量量值的叫做间接测量,相应的被测量称为间接测量量。例如,某一立方体的密度 ρ 是通过对其质量 m 、长 l 、宽 b 及高 h 的测量,根据密度的定义式

$$\rho = \frac{m}{l \cdot b \cdot h}$$

计算出的。由于材料的密度与温度有关,因此,测量结果还应注明测量过程的环境温度,这才是完整的间接测量结果。

为了减小测量误差,往往对同一固定被测量进行多次重复测量,如果每次测量的条件都相同(同一观测者,同一套仪器,同一种测量原理和方法,同样的环境等),那就没有任何根据可以判断某次测量一定比另一次测量更准确,所以,每次测量的可靠程度只能认为是相同的。这种重复测量称为等精度测量,测得的一组数据称为测量列。多次重复测量时,只要有一个测量条件发生了变化,如更换了测量所用的量具或仪表,或改变了测量方法等,这种重复测量称为非(不)等精度测量。对这种测量要引入测量“权”的概念,“权”是用来衡量各单次或局部测量结果可靠性的数字,测量的权越大,说明该次测量结果的可靠性越大,它在最后测量结果中所占的比重也应越大。物理实验中尽量采用等精度测量。

1.1.2 真值与测得值

任何一个物理量在确定条件下客观存在的、也就是实际具备的量值称为真值。例如,某一物体在常温条件下具有一定的几何形状及质量。真值是一个比较抽象和理想的概念,一般来说不能确切知道这个值。真值包含理论真值(如三角形内角之和恒为 180°),约定真值(如指定值、标准值、公认值)及最佳估计值等。

通过各种实验所得到的量值称为测得值,多指测量仪器或装置的读数或指示值。测得值是被测量真值的近似值,包括:①单次测得值。若只能进行一次测量,如变化过程中的测量,或没有必要进行多次测量;对测量结果的准确度要求不高,或有足够的把握;仪器的准确度不高,多次测量结果相同,这时就用单次测得值近似地表示被测量的真值。②算术平均值。对多次等精度重复测量,用所有测得值的算术平均值来替代真值,由数理统计理论可以证明,算术平均值是被测量真值的最佳估计值。③加权平均值。当每个测得值的可信程度或测量准确度不等时,为了区分每个测得值的可靠性,即重要程度,对每个测得值都给一个“权”数。最后测量结果用带权数的测得值求出的平均值表示,即谓加权平均值。

1.1.3 测量误差及其分类

(1) 测量误差的来源

每个测得值都有一定的近似性,它们与真值之间总会有或多或少的差异,这种差异在数值上的表示称为误差。误差自始至终存在于一切科学实验和测量过程之中,测量结果都存在误差,这就是误差公理。

①在测量过程中产生的误差。a. 方法误差:由于所采用的测量原理或测量方法本身的近似或不严格、不完善所产生的测量误差。b. 仪器误差:在进行测量时由所使用的测量工具、仪表、仪器、装置、设备本身固有的各种缺陷的影响而产生的误差。c. 环境误差:测量系统以外的周围环境因素对测量的影响,而使测量产生的误差,如温度、湿度、气压、震动、灰尘、光照、电场、磁场、电磁波等。d. 主观误差:由进行测量的操作人员素质条件所引起的误差,如实验者的分辨能力、反应速度以及固有习惯等。

②在处理测量数据时产生的误差。如有效数字的舍入误差,利用各种数学常数或物理常量引入的误差,利用各种近似计算或作图带来的误差等。

(2) 测量误差的分类

①系统误差。在相同条件下(指方法、仪器、环境、人员)多次重复测量同一物理量时,误差的大小和符号(正、负)均保持不变或按某一确定的规律变化,这类误差称为系统误差,它的特征是确定性。前者称为定值系统误差,后者称为变值系统误差。按对系统误差掌握的程度又可分为已定系统误差和未定系统误差。对不能确定其大小和符号的未定系统误差可按随机误差处理。

例如,称衡质量时,使用的是 20 g 的三等砝码,允许有 ± 1 mg 的误差。又如停表指针的转动中心与刻度盘的几何中心不重合,会使停表指示值出现周期性误差。用受热膨胀的米尺测量长度,用零点不准的螺旋测微计测量厚度都会引入系统误差。又如伏安法测电阻,电流表无论内接还是外接都会引入误差等。

②随机误差。测量时,即使消除了系统误差,在相同条件下多次重复测量同一物理量时,各次测得值仍会有些差异。其误差的大小和符号没有确定的变化规律,但如果大量增加测量次数,其总体(多次测量得到的所有测得值)服从一定的统计规律,这类误差称为随机误差,它的特征是偶然性。

随机误差是由于测量过程中存在许多难以控制的不确定的随机因素引起的。这些随机因素有空气的流动,温度的起伏,电压的波动,不规则的微小振动,杂散电磁场的干扰,以及实验者感觉器官的分辨能力、灵敏程度和仪器的稳定性,等等。某一次测量的随机误差往往是由多种因素的微小变动共同引起的。如用停表测量三线摆的周期,按下按钮的时刻有早有迟,动作迟早的程度有差异,从而产生了不

可避免的随机误差。

假设系统误差已经消除,且被测量本身又是稳定的,在相同条件下,对同一物理量进行大量次数的重复测量,可以发现随机误差服从统计规律。统计规律分布常用图形表示,其中最常见的是高斯分布,又称正态分布,其分布曲线如图1-1所示,它的特征为:

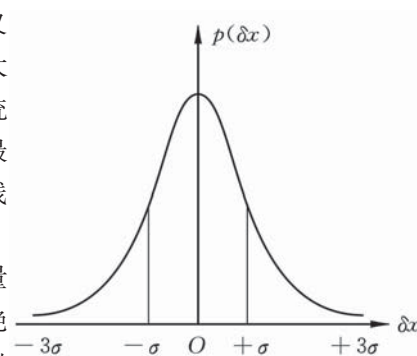


图1-1 高斯分布

- 单峰性:以大量重复测量所获得的测量值的算术平均值为中心而相对集中分布。即绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大(次数多)。

- 对称性:绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相同。

- 有界性:误差的绝对值不会超过某一界限,即绝对值很大的误差出现的概率趋于零,随机误差的分布具有有限的范围。

- 抵偿性:随着测量次数的增加,随机误差的代数和趋于零,即随机误差的算术平均值将趋于零。实际上,抵偿性可由单峰性及对称性导出。

③粗大误差。明显地歪曲了测量结果的异常误差称为粗大误差。它是由没有觉察到的实验条件的突变,仪器在非正常状态下工作,无意识的错误的操作等因素造成的。含有粗大误差的测得值称为可疑值,也称异常值或坏值。在没有充分依据时,绝不能按主观意愿轻易地去除,应该按照一定的统计准则慎重地予以剔除。

由于实验者的粗心大意,疏忽失误,使观察、读数或记录错误,是应该及时发现,力求避免的。错误不是误差。

在分析误差时,必须根据具体情况,对误差来源进行全面分析,不但要找全产生误差的各种因素,而且要找出影响测量结果的主要因素。首先剔除粗大误差,消除或减弱系统误差,然后估算随机误差与未定系统误差并进行合成。

(3)测量误差的表示

①绝对误差。测量误差的定义为

$$\text{测量误差 } \delta x = \text{测得值 } x - \text{真值 } x_0$$

测量误差是测得值与真值的差值,常称为绝对误差。绝对误差可正可负,具有与被测量相同的量纲和单位,它表示测得值偏离真值的程度,但要注意,绝对误差不是误差的绝对值。由于真值一般是得不到的,因此误差也无法计算。实际测量中是用多次测量的算术平均值 $\bar{x}$ 来代替真值,测得值与算术平均值之差称为偏差,又

称残差,用 Δx 表示,即

$$\Delta x = x - \bar{x} \quad (1-1)$$

假定一个物体的真实长度为 100.0 mm,而测得值为 100.5 mm,则测量误差为 0.5 mm。另一个物体的真实长度为 10.0 mm,测得值为 10.5 mm,测量误差也为 0.5 mm。从绝对误差看两者相等,但测量结果的准确程度却大不一样。显然,评价一个测量结果的优劣,不仅要看绝对误差的大小,还要看被测量本身的大小。

②相对误差。相对误差的定义为测得值的绝对误差与被测量真值之比。由于真值不能确定,实际上常用约定真值,如公认值、算术平均值替代。相对误差 E 是一个无单位的无名数,常用百分数表示,如

$$E = \frac{\Delta x}{x} \times 100\% \quad (1-2)$$

前述第一个测量的相对误差 $E = \frac{0.5}{100.0} = 0.5\%$,而第二个测量的相对误差为 $E = \frac{0.5}{10.0} = 5\%$ 。显然第一个测量比第二个测量准确程度高。

③百分误差。有时将测得值与理论值或公认值进行比较,则用百分误差 E_r 表示,如

$$E_r = \frac{|\text{测得值} - \text{理论值}|}{\text{理论值}} \times 100\%$$

(4)误差与测量结果的关系

为了定性地描述测量结果的重复性及其与真值的接近程度,常用精密度、正确度、准确度来描述。

精密度:表示重复测量所得结果相互接近的程度,即测得值分布的密集程度,它表征随机误差对测得值的影响,精密度高表示随机误差小,测量重复性好,测量数据比较集中。精密度反映随机误差大小的程度。

正确度:表示测得值或实验所得结果与真值的接近程度,它表征系统误差对测得值的影响,正确度高表示系统误差小,测得值与真值的偏离小,接近真值的程度高。正确度反映系统误差大小的程度。

准确度:描述各测得值重复性及测量结果与真值的接近程度,它反映测量中的系统误差和随机误差综合大小的程度。测量准确度高,表示测量结果既精密又正确,数据集中,而且偏离真值小,测量的随机误差和系统误差都较小。

图 1-2 是以打靶时弹着点的分布为例,说明这三个词的涵义。(a)图表示射击的精密度高但正确度低,即随机误差小系统误差大。(b)图表示射击的正确度高但精密度低,即系统误差小而随机误差大。(c)图的弹着点比较集中,又都聚集在靶心附近,表示射击的准确度高,既精密又正确,系统误差和随机误差都小。

必须注意,由于这些名词没有明确的统一规定,容易引起混淆,如有的书中把正确度称为准确度,而把准确度称为精确度。至于精度是一个泛指的概念,一般多指准确度,有的是指精密度。在阅读不同书籍或资料时应予以注意。

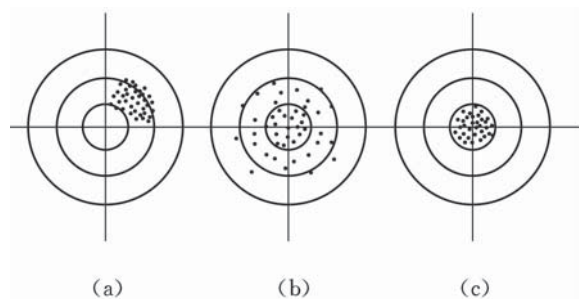


图 1-2 射击时弹着点的分布

1.2 随机误差的估算

1.2.1 直接测量结果的误差估算

(1) 单次测量结果的表示

有些实验是在变化过程中对被测量进行测量的,只能测量一次;有些实验有多个被测量,其中某个或某几个被测量的相对误差很小,没有必要多次测量,只需测量一次;或仪器的灵敏度较低,多次测量结果相同。这时就用单次测得值作为测量结果,近似表示被测量的真值。

单次测量结果的误差一般用仪器的额定误差 $\Delta_{\text{仪}}$ 来表示。例如用 0~25 mm 的一级千分尺测量圆柱体的直径 D 为 9.056 mm,从国家标准中查出仪器示值误差为 0.004 mm,则直径的测量结果表示为

$$D = 9.056 \pm 0.004 \text{ mm}$$

$$E = \frac{0.004}{9.056} \times 100\% = 0.044\%$$

当测量不能在正常状态下进行时,单次测量结果的误差应根据测量的实际情况和仪器误差进行估计。如用米尺测量杨氏模量仪所夹钢丝的长度,米尺不能紧靠钢丝,上下两端读数误差可各取 0.5 mm,则钢丝长度的测量误差为 1 mm。又如用停表测量三线摆的周期,误差主要是由启动和制动按钮时,手的动作和目测位置不完全一致而引起,估计启动和制动各有 0.1 s 的误差,则该周期时间的误差可估计为 0.2 s。

(2) 多次等精度测量结果的表示

① 算术平均值。假定在实验中系统误差已被消除或已消减到可以忽略的程度,通过 n 次等精度的独立测量得到一系列测量值

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

根据最小二乘法原理:一个等精度测量列的最佳值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值。设那个值为 x_0 , 则

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 = \text{最小值}$$

取 $f(x_0)$ 的一阶导数, 并令其等于零, 即

$$\frac{df(x_0)}{dx_0} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = nx_0$$

从而得到

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \quad (1-3)$$

也就是说, 这一组测量数据 x_i 的算术平均值 $\bar{x}$ 就是这一测量列真值的最佳估计值, 所以测量结果用算术平均值来表示。对于有限次测量, 平均值会随测量次数的不同而有所变动, 当测量次数无限增加时, 算术平均值将无限接近于真值。

测量的目的不仅要得到被测量的最佳值, 而且要对最佳值的可靠程度作出评定, 即要指出误差范围。

②算术平均偏差。对一固定量进行多次测量所得各偏差绝对值的算术平均值称为算术平均偏差, 即

$$\overline{\Delta x} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta x_i|}{n} \quad (1-4)$$

当测量次数少, 测量仪表准确度不高, 或数据离散度不大时, 可用算术平均偏差估算随机误差。

③标准偏差。随机误差具有统计规律, 其中最常见的是高斯分布, 其分布曲线如图 1-1 所示。这一统计规律在数学中可用高斯误差分布函数来描述, 其概率密度函数为

$$\rho(\delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\delta x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1-5)$$

σ 是式(1-5)中的唯一参量, 是高斯分布的特征量。在一定测量条件下 σ 是一个常量, 从而分布函数就唯一确定下来。测量条件不同造成随机误差大小不同, 反映在分布函数上就是 σ 大小不同。 σ 大随机误差离散程度大, 测量精密度低, 大误差出现的次数多, 即各次测得值的分散性大, 重复性差, 分布曲线低而平坦。反之,

σ 小随机误差离散程度小,测量精密度高,小误差占优势,即各测得值的分散性小,重复性好,曲线陡而峰值高。因此在重复测量中,对于一组测得值可用特征量 σ 来描述测量的精密度。式(1-6)是 σ 的数学表达式。

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1-6)$$

σ 称为标准误差,又称方均根误差。对同一固定量进行无限多次测量,各次测得值 x_i 与被测量真值 x_0 之差的平方和的算术平均值,再开方所得的数值即为标准误差。

应该注意, Δx 是实在的误差值,是真误差,可正可负;而 σ 并不是一个具体的测量误差值,它表示在相同条件下进行多次测量后的随机误差概率分布情况,是按一定置信概率给出的随机误差变化范围的一个评定参量,具有统计意义。 σ 是评定所得测量列精密程度高低的指标。当测量次数趋于无限多时,可以推出

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \approx 0.7979 \sigma \quad (1-7)$$

图 1-1 归一化曲线下的总面积表示各种误差出现的总概率,为 100%,给定区间(即随机误差大小的变化范围)不同,误差出现的概率,也就是测量值出现的概率不同。这个给定的区间称为置信区间,相应的概率称为置信概率,用 p 表示。

$-\sigma$ 到 σ 之间曲线下的面积是总面积的 68.3%,它表示测量列中任一测量值的随机误差落在区间 $[-\sigma, \sigma]$ 内的概率。或者说,当测量次数无限多时,测量值落在区间 $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ 内的次数占总测量次数的 68.3%。也就是说,在区间 $[\bar{x} \pm \sigma]$ 内包含真值的可能性是 68.3%。

在区间 $[\pm 3\sigma]$ 内的置信概率为 99.7%,也就是大约在一千次测量中,只有三次测量值落在该区间之外,而一般测量次数为 5~10 次,几乎不可能出现在区间之外,所以将 3σ 称为极限误差,也称误差限。这也是剔除具有粗大误差数据的拉依达准则的依据。置信区间为 1.96σ 的置信概率为 95%。把算术平均偏差作为置信区间,相应的置信概率为 57.5%。为了比较测量列的精密程度,常用在同一置信概率下置信区间的大小来表示,置信区间越小,则测量列的精密程度越高。

由于真值不能确定,所以 σ 也无法计算。前面讨论过,测量列的算术平均值 $\bar{x}$ 是测量结果的最佳值,所以标准误差常用残差来计算,称为标准偏差或标准差,用 s 表示,可以推导出

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2} \quad (1-8)$$

上式称为贝塞尔公式, s 是测量列中任何一次测得值的标准偏差。

由于算术平均值比任何一次测量值都更接近于真值,也就是 $\bar{x}$ 的可靠性比任一

次测量值 x_i 都高, 所以算术平均值的标准偏差 $s_{\bar{x}}$ 就理所当然地小于 s , 可以证明

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} \quad (1-9)$$

在实验中实际测量只能进行有限次, 随机误差不严格遵从高斯分布, 而是遵从 t 分布, t 分布曲线比高斯分布曲线稍低稍宽, 在测量次数 $n \rightarrow \infty$ 时趋于高斯分布。因此, 对于相同的置信概率, 按高斯分布计算出的标准偏差要乘以因子 t 。当置信概率不同时, t 的取值也不同。一般表征测量次数的方法是引入自由度 ν , 其定义为

$$\nu = n - 1$$

表示当测量次数有限时, n 次测量中只有 $n-1$ 次是独立的。表 1-1 给出了常用的不同自由度 ν 的 t 值。

表 1-1 常用的不同自由度 ν 的 t 值

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	40	∞
$t_{0.683}$	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.03	1.01	1
$t_{0.95}$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.09	2.02	1.96

对于只存在随机误差的多次等精度测量结果应该表示为

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} (\text{单位}) \\ E = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100\% \end{cases}$$

④两种偏差的比较。用螺旋测微计测量一钢球的直径, 得到的两组测量数据如下:

A 组	x_i (mm)	1.250	1.256	1.251	1.255
B 组	x_i (mm)	1.253	1.248	1.253	1.258
$\bar{x}_A = 1.253$ mm		$\overline{\Delta x_A} = 0.003$ mm		$E_A = 0.24\%$	
$\bar{x}_B = 1.253$ mm		$\overline{\Delta x_B} = 0.003$ mm		$E_B = 0.24\%$	
		$s_A = 0.003$ mm		$E_A = 0.24\%$	
		$s_B = 0.004$ mm		$E_B = 0.32\%$	

对上列 A、B 两组数据, 如果都用算术平均偏差计算, 则其绝对误差和相对误差都一样, 没有区别。若用标准偏差计算, 则它们的绝对误差和相对误差都不一样。仔细分析数据可以看出, A 组的涨落小于 B 组, 这就清楚地说明, 标准偏差比算术平均偏差更能准确地表征测量结果的离散度及数据分布情况。算术平均偏差只是粗略地反映了测量误差的大小, 而标准偏差则反映了误差的分布。但算术平均偏差计算比较简单, 因此在要求不高或数据离散度不大时, 还是一种比较方便的方法。

⑤多次测量次数的确定。从式(1-9)可以看出,当测量次数 n 增加时, $s_{\bar{x}}$ 会越来越小,这就是通常所说的增加测量次数可以减小随机误差的道理。 $s_{\bar{x}}$ 随 n 的变化关系可用图 1-3 表示,从图中可以看出, $s_{\bar{x}}$ 的减小,在 n 较大时变得非常缓慢,当 $n > 10$ 以后, $s_{\bar{x}}$ 的减小已很不明显。另外,测量的准确度还受到仪器准确度的制约以及环境因素的影响。所以实际测量次

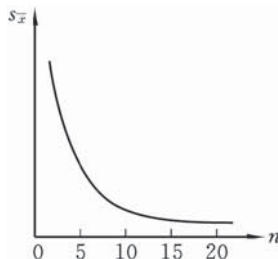


图 1-3 标准偏差与测量次数的关系

数,在物理实验中一般重复 5~10 次即可。片面地增加测量次数,不仅误差的减小不明显,而且拖长实验时间,仪器、环境条件的不变性也难保证。

一般的原则是,各重复测得值若起伏大,就需要多测几次,若起伏小就可以少测几次。对一个被测量至少应先测 2~3 次,若各次测得值相同,则表明所用仪器准确度不高,反映不出测量的随机误差,可以按单次测量处理。若各次测得值不同,则应再重复测量几次,总共测 5~10 次即可。

例 1 用千分尺测量 10 次钢球的直径 d , 数据如下:

d_i/mm

11.998, 12.005, 11.998, 12.007, 11.997 11.995, 12.005
12.003, 12.000, 12.002。

试估算 d 的平均值、算术平均偏差、单次测量值的标准偏差和平均值的标准偏差,正确表示测量结果。

解 算术平均值

$$\begin{aligned}\bar{d} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_i = \frac{1}{10} (11.998 + 12.005 + 11.998 + 12.007 + 11.997 + 11.995 \\ &\quad + 12.005 + 12.003 + 12.000 + 12.002) = 12.001 \text{ mm}\end{aligned}$$

算术平均偏差

$$\begin{aligned}\overline{\Delta d} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |\Delta d_i| \\ &= \frac{1}{10} (0.003 + 0.004 + 0.003 + 0.006 + 0.004 + 0.006 + 0.004 \\ &\quad + 0.002 + 0.001 + 0.001) = 0.003 \text{ mm}\end{aligned}$$

单次测量值的标准偏差

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{10 - 1}} = \sqrt{\frac{144 \times 10^{-6}}{9}} = 0.004 \text{ mm}$$

平均值的标准偏差

$$s_d = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{0.004}{\sqrt{10}} = 0.001 \text{ mm}$$

测量结果

$$\begin{cases} d = 12.001 \pm 0.003 \text{ mm} \\ E_d = \frac{0.003}{12.001} = 0.025\% \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} d = 12.001 \pm 0.001 \text{ mm} \\ E_d = \frac{0.001}{12.001} = 0.008\% \end{cases}$$

1.2.2 间接测量结果的误差估算

物理实验中比较多的测量是间接测量,间接测量结果是由直接测量结果通过一定的函数式计算出来的。由于各直接测得值存在误差,因此,由直接测得值运算得到的间接测得值也必然存在误差,这就是误差的传递。表达间接测量值误差与各直接测量值误差之间的关系式,称为误差传递公式。

(1) 误差传递的基本公式

设间接测量量 N 的函数式为

$$N = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1-10)$$

式中 $x_1, x_2, \dots$ 均为彼此相互独立的直接测量量,每一直接测量量为多次等精度测量,且只含随机误差,若各直接测量量用算术平均偏差估算误差,测量结果分别为 $x_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta x_1, x_2 = \bar{x}_2 \pm \Delta x_2, \dots, x_m = \bar{x}_m \pm \Delta x_m$,那么间接测量量 N 的最可信赖值为

$$\bar{N} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m) \quad (1-11)$$

即将各直接测量量的算术平均值代入函数式中,便可求出间接测量量的最可信赖值。

由于误差均为微小量,相似于数学中的微小增量,所以可借助全微分求出误差传递公式。

对式(1-10)求全微分有

$$dN = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

上式表示,当 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 有微小改变 $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ 时, N 有相应的微小改变 dN ,而通常误差远小于测量值,故可把 $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ 看作误差, dN 的改变由各直接测量量的改变决定,把微分符号“ d ”改为误差符号“ Δ ”,从最不利情况考虑,取各直接测量量误差项的绝对值,就得到最大绝对误差传递公式,即算术合成法传递公式

$$\Delta N = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_m} \right| \Delta x_m \quad (1-12)$$

对式(1-10)两边取自然对数后再求全微分,可得相对误差传递的基本公式

$$\frac{\Delta N}{N} = \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \cdots + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_m} \right| \Delta x_m \quad (1-13)$$

式(1-12)和(1-13)中每项称为分误差, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 和 $\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} (i=1,2,\dots,m)$ 称为误差传递系数。可以看出,间接测量量的误差不仅与各直接测量量的误差 Δx_i 有关,而且与误差传递系数有关。

当直接测量量的个数和测量次数都很少时,随机误差所遵循的抵偿性就难以确立,即随机误差出现符号相同的概率较大,这时,可用上述基本公式估算间接测量量的误差, $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$, 用各直接测量量的算术平均偏差即可。若间接测量量是由独立相加减的函数关系确定的,那么先计算间接测量量的绝对误差,再求相对误差比较简便。若间接测量量是由独立相乘除的函数关系确定的,则先计算相对误差,然后计算绝对误差比较简便。表1-2列出常用函数误差传递的基本公式。

表1-2 常用函数误差传递的基本公式

函数关系式	误差传递公式
$N = x \pm y$	$\Delta N = \Delta x + \Delta y$
$N = xy, N = \frac{x}{y}$	$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$N = kx$	$\Delta N = k\Delta x, \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x}$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{k} \frac{\Delta x}{x}$
$N = \frac{x^k \cdot y^m}{z^n}$	$\frac{\Delta N}{N} = k \frac{\Delta x}{x} + m \frac{\Delta y}{y} + n \frac{\Delta z}{z}$
$N = \sin x$	$\Delta N = \cos x \Delta x, \quad \frac{\Delta N}{N} = \cot x \cdot \Delta x$
$N = \ln x$	$\Delta N = \frac{\Delta x}{x}$

(2) 标准偏差的传递公式

若各相互独立的直接测量量测量次数较多,则其测量误差服从高斯分布规律,各直接测量量用标准偏差估算误差,则间接测量量的标准偏差应按“方和根”合成法来求传递公式

$$s_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 s_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right)^2 s_{x_m}^2} \quad (1-14)$$

$$\frac{s_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1} \right)^2 s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2} \right)^2 s_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_m} \right)^2 s_{x_m}^2} \quad (1-15)$$

式中 $s_{x_1}, s_{x_2}, \dots, s_{x_m}$ 分别为各直接测量量算术平均值的标准偏差。

若间接测量量的函数关系为线性关系,则间接测量量的误差仍服从高斯分布,且具有与直接测量量相同的置信概率。

利用误差传递公式可以分析各直接测量量误差对间接测量量误差影响的大小,找出误差的主要来源,从而为设计实验、改进实验、合理选配仪器提供必要的依据。一般情况下,各直接测量量误差对最后结果误差的影响起主要作用的,往往只有少数几项。在用“方和根”法进行误差合成时,根据微小误差准则,若某一分误差小于最大分误差的 $\frac{1}{3}$ 时,就可略去不计。“方和根”合成法更加符合实际,在准确度要求较高的实验中,都采用标准偏差传递公式。表 1-3 列出了常用函数的标准偏差传递公式。

表 1-3 常用函数的标准偏差传递公式

函数关系式	标准偏差传递公式
$N = x \pm y$	$s_N = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$
$N = xy, \quad N = \frac{x}{y}$	$\frac{s_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2}$
$N = kx$	$s_N = ks_x, \quad \frac{s_N}{N} = \frac{s_x}{x}$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\frac{s_N}{N} = \frac{1}{k} \frac{s_x}{x}$
$N = x^k$	$\frac{s_N}{N} = k \frac{s_x}{x}$
$N = \frac{x^k \cdot y^m}{z^n}$	$\frac{s_N}{N} = \sqrt{k^2 \left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + m^2 \left(\frac{s_y}{y}\right)^2 + n^2 \left(\frac{s_z}{z}\right)^2}$
$N = \sin x$	$s_N = \cos x s_x$
$N = \tan x$	$s_N = \sec^2 x \cdot s_x$
$N = \ln x$	$s_N = \frac{s_x}{x}$

例 2 推导圆环面积 $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ 的误差传递基本公式。

解 $\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial D} \right| \Delta D + \left| \frac{\partial S}{\partial d} \right| \Delta d = \frac{\pi}{4}(2D\Delta D + 2d\Delta d) = \frac{\pi}{2}(D\Delta D + d\Delta d)$

$$E_s = \frac{\Delta S}{S} = \frac{2D}{D^2 - d^2} \Delta D + \frac{2d}{D^2 - d^2} \Delta d$$

例 3 设 $N = \frac{x-y}{z-x}$, 用算术合成法推导误差传递公式。

解 方法 1: 对 N 求全微分

$$dN = \frac{(z-x)(dx-dy) - (x-y)(dz-dx)}{(z-x)^2}$$

合并同类项

$$dN = \frac{(z-y)dx - (z-x)dy - (x-y)dz}{(z-x)^2}$$

把微分号换为误差号, 各项取绝对值, 得到绝对误差传递公式

$$\begin{aligned}\Delta N &= \frac{(z-y)\Delta x + (z-x)\Delta y + (x-y)\Delta z}{(z-x)^2} \\ &= \frac{(z-y)}{(z-x)^2}\Delta x + \frac{1}{z-x}\Delta y + \frac{(x-y)}{(z-x)^2}\Delta z\end{aligned}$$

相对误差

$$E_N = \frac{\Delta N}{N} = \frac{(z-y)\Delta x}{(x-y)(z-x)} + \frac{\Delta y}{x-y} + \frac{\Delta z}{z-x}$$

方法 2: 等式两边取自然对数, 再求全微分

$$\ln N = \ln(x-y) - \ln(z-x)$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{d(x-y)}{x-y} - \frac{d(z-x)}{z-x} = \frac{dx-dy}{x-y} - \frac{dz-dx}{z-x}$$

合并同类项

$$\frac{dN}{N} = \frac{(z-y)dx}{(x-y)(z-x)} - \frac{dy}{x-y} - \frac{dz}{z-x}$$

把微分号改为误差号, 各项取绝对值, 得到相对误差传递公式

$$E_N = \frac{\Delta N}{N} = \frac{(z-y)\Delta x}{(x-y)(z-x)} + \frac{\Delta y}{x-y} + \frac{\Delta z}{z-x}$$

绝对误差

$$\Delta N = N \cdot E_N = \frac{(z-y)}{(z-x)^2}\Delta x + \frac{1}{z-x}\Delta y + \frac{(x-y)}{(z-x)^2}\Delta z$$

例 4 测量某圆柱体的高 $h = 13.322 \pm 0.006$ cm, 直径 $d = 1.541 \pm 0.005$ cm, 计算圆柱体的体积 V 及其误差。

解 $V = \frac{\pi}{4}d^2h = \frac{1}{4} \times 3.1416 \times 1.541^2 \times 13.322 = 24.85 \text{ cm}^3$

$$E_V = 2E_d + E_h = 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} = 2 \times \frac{0.005}{1.541} + \frac{0.006}{13.322} = 0.7\%$$

$$\Delta V = V \cdot E_V = 24.85 \times 0.7\% = 0.2 \text{ cm}^3$$

圆柱体的体积及其相对误差分别为

$$V = 24.8 \pm 0.2 \text{ cm}^3, \quad E_V = 0.7\%$$

需要注意: V 的计算结果有效数字位数的多少, 应当根据绝对误差所在的位置决定, 绝对误差在物理实验教学中只保留一位, 计算结果有效数字的最末一位应与绝对误差所在位对齐。相对误差保留 1~2 位。

例 5 用流体静力称衡法测量不规则物体的密度, 测得在空气中的质量 $m = 27.06 \pm 0.02 \text{ g}$, 在水中的视在质量 $m_1 = 17.03 \pm 0.02 \text{ g}$, 当时水的密度 $\rho_0 = 0.9997 \pm 0.0003 \text{ g/cm}^3$ 。求密度 ρ 并用标准偏差估算误差, 正确表达测量结果。

解 流体静力称衡法测量密度的公式为

$$\rho = \frac{m}{m - m_1} \cdot \rho_0$$

取自然对数, 求全微分

$$\begin{aligned} \ln \rho &= \ln m - \ln(m - m_1) + \ln \rho_0 \\ \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{dm}{m} - \frac{d(m - m_1)}{m - m_1} + \frac{d\rho_0}{\rho_0} \end{aligned}$$

合并相同变量的系数

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{m_1}{m(m - m_1)} dm + \frac{1}{m - m_1} dm_1 + \frac{1}{\rho_0} d\rho_0$$

标准偏差传递公式

$$\frac{s_\rho}{\rho} = \sqrt{\frac{m_1^2}{m^2(m - m_1)^2} s_m^2 + \frac{1}{(m - m_1)^2} s_{m_1}^2 + \frac{1}{\rho_0^2} s_{\rho_0}^2}$$

将测量值代入求 ρ

$$\rho = \frac{m}{m - m_1} \cdot \rho_0 = \frac{27.06}{27.06 - 17.03} \times 0.9997 = 2.697 \text{ g/cm}^3$$

标准偏差

$$\frac{s_\rho}{\rho} = \sqrt{\frac{17.03^2 \times 0.02^2}{27.06^2 \times (27.06 - 17.03)^2} + \frac{0.02^2}{(27.06 - 17.03)^2} + \frac{0.0003^2}{0.9997^2}} = 0.2\%$$

$$s_\rho = \rho \cdot \frac{s_\rho}{\rho} = 2.697 \times 0.2\% = 0.005 \text{ g/cm}^3$$

测量结果

$$\rho = 2.697 \pm 0.005 \text{ g/cm}^3, \quad E_\rho = 0.2\%$$

1.3 系统误差的发现和處理

1.3.1 系统误差的特征

系统误差是由实验原理的近似, 实验方法的不完善, 所用仪器的缺陷, 环境条

件不符合要求以及观测人员的习惯等产生的误差。实验方案一经确定,系统误差就有一个客观的确定值,实验条件一旦变化,系统误差也按一种确定的规律变化。从对测量结果的影响来看,系统误差不消除往往比随机误差带来的影响更大,所以,实验中必须进行认真的分析讨论。

1.3.2 发现系统误差的方法

(1)理论分析法

分析实验所依据的原理是否严密,测量所用的理论公式要求的条件是否满足。如单管落球法测粘度,无限广延条件不满足;伏安法测电阻,电流表、电压表内阻不符合要求等。

分析实验方法是否完善,测量仪器所要求的使用条件在测量过程中是否已经满足。如天平的水平、零点是否调节妥当;各类电表水平或垂直放置是否正确等。

(2)实验对比法

改变测量方法或实验条件,改变实验中某些参量的数值或测量步骤,调换测量仪器或操作人员等进行对比,看测量结果是否一致,这是发现定值系统误差最基本的方法。如各种指针式显示仪表,其刻度盘若产生移动,偏离原校准位置,会给测量带来定值误差,通过实验对比即可发现。

(3)数据分析法

对同一被测量进行多次重复测量,通过计算偏差、进行作图或列表分析,可发现测量中是否存在变值系统误差,这是残差统计法。如将测量数据按测量先后顺序排列,观察其偏差的符号,若正负大体相同,并无显著的变化规律,就不宜怀疑存在系统误差。即通过计算进行比较,看其能否满足只存在随机误差的条件,否则,测量中存在变值系统误差。

1.3.3 减小或消除系统误差的一般途径

系统误差服从因果规律,任何一种系统误差都有其确定的产生原因,在一定的测量条件下,只有找出产生该误差的具体原因,才能有针对性地采取相应措施,消除产生的根源或限制它的产生。因此,处理系统误差要对实验的各个环节周密考虑,采用个别考察的方法,根据实际问题具体对待。

(1)从产生系统误差的根源上加以消除

从进行测量的操作人员,所用的测量仪器,采用的测量方法和测量时的环境条件等入手,对它们进行仔细的分析研究,找出产生系统误差的原因,并设法消除这些因素。例如,设法保证仪器装置满足规定的使用条件。测量显微镜的丝杆和螺

母间有间隙,操作不当会引入空程误差,则应使丝杆与螺母啮合后再进行测量,且只能朝一个方向转动鼓轮。拉伸法测钢丝的杨氏模量,钢丝不直将给其微小伸长量的测量带来较大的误差,则可在测量前给钢丝加上一个砝码,使其伸直。又如,用补偿法测电压,消除伏安法测电阻时方法上的系统误差。图 1-4(a)为电流表外接的伏安法测电阻电路,由于电压表内阻不是无穷大,所以电流表的读数大于通过电阻 R 的电流。如果将电路变换为图 1-4(b),用补偿法测量电压,接通 K_1 ,当调节 R_2 使电流计 G 示值为零时,电压表的读数就是电阻 R 两端的电压,电流表的读数就是流过电阻 R 的电流,从而消除了系统误差。

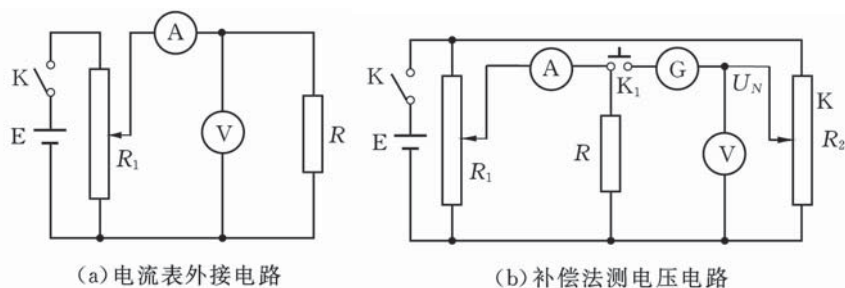


图 1-4 伏安法测电阻

(2) 用修正的方法引入修正值或修正项

对所用仪器仪表进行检定校验得到校正数据或校正图线,对测得值进行修正。根据理论分析,若系统误差来源于测量公式的近似,则可引入修正值或修正项。如单管落球法测液体粘度,由于圆管直径不是无限大需引入修正值。密立根油滴法测电子电荷实验,由于油滴很小,它的半径与空气分子的平均自由程很接近,必须引入修正项以减小系统误差。

(3) 选择适当的测量方法,用测量技术抵消系统误差

① 消除定值系统误差常用的方法。

a. 交换测量法。将测量中的某些条件(如被测物的位置)相互交换,使产生系统误差的原因对测量结果起相反作用,即使交换前后产生的系统误差大小相等、符号相反,从而相互抵消。如用天平称衡物体质量时的“复称法”,将被测物体在同一架天平上称衡两次,一次把被测物放在左盘,一次放在右盘,若两次称衡所得质量值为 m_1 、 m_2 ,根据杠杆原理,则物体的质量 m 为

$$m = \sqrt{m_1 m_2} \approx \frac{m_1 + m_2}{2}$$

这样就消除了天平不等臂的系统误差。

再如测定薄透镜的焦距时,将屏、物位置互换,取其算术平均值作为测量结果以抵消系统误差。

b. 标准量替代法。在相同的条件下,用一标准量(经过准确度高一级以上的仪器测量的给出值)替换被测量,达到消除系统误差的目的。如消除天平称衡时的不等臂误差;交直流电桥作精密测量时也常用此法。

c. 反向补偿法(异号法)。对被测量进行两次适当的测量,使两次测量产生的系统误差等值而反向,取平均值作为测量结果,即可消除系统误差。如利用霍尔效应测量磁场,为了消除不等势电压等副效应对测量的影响,可分别改变通过霍尔片电流的方向及磁场的方向进行测量,消除附加电势差。

d. 变化测量方法使系统误差随机化,以便在多次重复测量中抵消。如米尺的刻度不均匀,可以使用米尺的不同部位进行多次测量。

②消除变值系统误差常用的方法。

a. 对称观测法消除随时间(或测量次数)具有线性变化规律的系统误差。如长度测量中千分尺螺杆螺距的误差随测量尺寸的增大而增大;一些被测工件随温度变化其尺寸呈线性变化。这些累积性系统误差,都可用等空间间隔或某时刻前后等时间间隔各作一次观测,取两次读数的算术平均值作为测量结果,从而消除线性变化的系统误差。

b. 半周期偶数次观测法消除按周期性规律变化的系统误差。如分光计等测角仪器利用间隔 180° 的双游标进行读数,再取其平均值的方法,以消除刻度环与游标盘不同心的偏心差。

(4)消除具有随机误差特性的系统误差

此时可采用在不同部位多次测量的方法,用平均值作为测得值来减小系统误差。如测量杨氏模量用的钢丝直径不均匀;测量液体表面张力系数的毛细管直径不均匀;测量电阻率用的铜棒直径不均匀都可采用多次测量法。

原则上讲,消除系统误差的途径,首先是限制它产生,即消除产生的根源,其次是设法修正它,修正测量公式或修正测量结果,或者设法在测量中抵消它,减小它对测量结果的影响。

对于系统误差只能尽量设法减小它,所谓“消除”是指把它的影响减小到随机误差之下,如果系统误差不影响测量结果有效数字的最后一位,就可认为已经消除。

前面分别单独讨论了随机误差与系统误差,其实在任何一次测量中是两者兼而有之,各自所占的比例与具体的测量有关。

1.3.4 仪器误差

(1) 测量器具的特性

①量程:测量仪器示值的标称范围两极限差的模,即指测量范围的上限值与下限值的差值,如从 -10 V 到 $+10\text{ V}$ 标称范围的电压表其量程为 20 V 。量程又称量限。

②标称值:测量仪器凑整的或近似的特性值,以指导其使用。

③灵敏度:测量仪器输出信号(称为响应)的变化除以对应的测量系统输入信号(称为激励)的变化,即测量仪器指示器的微小变化与造成该变化所需被测量的变化之比。灵敏度与激励值有关。灵敏度高意味着仪器对被测量的微小变化的响应能力高。灵敏度反映了指示仪表所能测量的最小被测量。当激励和响应为同种量时,灵敏度也可称为放大比或放大倍数,如光杠杆的灵敏度就是光杠杆的放大倍数。

④准确度:指测量仪器给出接近于被测量真值的示值能力。它与测量准确度(被测量的测量结果与真值间的符合程度)有联系又有区别。

⑤分度值:最小分度表示的量值,也就是相邻的指示不同量值的两刻线所代表的量值之差。与仪器准确度相对应,二者保持在同一数量级。一般仪表分度值取为准确度数值的 $0.5\sim 2$ 倍。

(2) 测量器具误差的表示

①示值误差:测量仪器示值减去对应输入量的真值。由于真值不能确定,实用中使用标准值等约定真值。即在规定的使用条件下,正确使用仪器时,测量仪器的示值与被测量的真值之间可能出现的最大绝对误差为示值误差。例如,一级千分尺在 100 mm 测量范围以内的示值误差为 $\pm 0.004\text{ mm}$,即表示任一分度上的示值与其真值之差都不会超过 $\pm 0.004\text{ mm}$ 。

②最大(极限)允许误差:技术规范、规程等对给定测量仪器所允许的误差极限值。

③额定误差:国家质量监督检验检疫总局计量司规定的该项仪器的出厂公差或允差,是一种系统误差。用合格的量具或仪表在正常使用条件下测定,其仪器误差不应超过公差,即公差提供的是仪器的最大误差。

④固有误差:在标准条件下确定的测量仪器的误差。即指仪表在规定的正常条件下进行测量时所具有的误差,它是仪表本身所固有的,是由于结构上和制作上的不完善而产生的。例如,线圈在转动时轴承里的摩擦和刻度划分不精密等原因

所引起的误差均属固有误差。固有误差是仪表的基本误差。

(3) 直读仪表的误差

①根据误差产生的原因可分为基本误差和附加误差两种。基本误差是仪表在规定的正常条件下进行测量时所具有的误差。仪表的正常工作条件是指:a. 仪表指针调整到零位;b. 仪表按规定工作位置安放;c. 周围的温度是 20°C , 或是仪表上所标的温度;d. 除地磁场外, 没有外来电磁场。

附加误差是由于偏离正常条件或在某一影响因素作用下而产生的误差, 这个数值变化是相对于正常条件的示值而言的, 不是相对于真值。附加误差是一个因素引起的示值变化, 而不是两个或两个以上因素引起变化的总和, 因此, 在附加误差前常冠以产生附加误差因素的名称, 如温度附加误差等。

②仪表的读数(测得值)与被测量的实际值之间的差值称为测量的绝对误差, 而被测量的实际值就等于仪表读数减去绝对误差。定义校正值与绝对误差大小相等而符号相反, 所以, 实际值 = 测量值 + 校正值。引入校正值后, 就可以对仪表读数进行校正, 以补偿其系统误差。

③用直读仪表直接进行测量时, 可以根据仪表准确度等级来估计测量结果的误差。仪表在规定条件下使用时, 测得值可能出现的最大绝对误差为

$$\Delta m = a\% \cdot X_m$$

式中 a 为仪表的准确度等级, 表示仪表本身的准确程度; X_m 为仪表的量程。应该注意, 仪表的准确度并不等于测量结果的准确度(即测量结果的相对误差)。测量结果的准确度与被测量的大小有关, 只有仪表使用在满刻度偏转时, 测量结果的准确度才等于仪表的准确度。

④指示仪表读数的有效位数, 可根据仪表的最大绝对误差确定。测得值的末位应与最大绝对误差位对齐, 按照实际情况(最小分度值, 分度的宽窄, 指针的粗细等)估读到最小分度的 $\frac{1}{10} \sim \frac{1}{2}$ 。

⑤数字仪表的误差表示。数字式仪表的显示值均为有效数字, 仪表本身已进行了估读。数字仪表的绝对误差 Δ 为

$$\Delta = \pm \alpha\% V_x \pm n$$

或

$$\Delta = \pm \alpha\% V_x \pm \beta V_m \quad (1-16)$$

式中 V_x 为测量指示值; V_m 为测量上限值; α 为误差相对项系数, β 为误差固定项系数。

数字仪表的数字部分误差很小, 一般为最后 1~2 个字码, 即 ± 1 或 ± 2 字。

⑥选择直读仪表时, 要根据被测量的最小值来选择具有合适灵敏度的仪表; 根

据被测量的最大值来选择量程;根据测量误差或不确定度的要求和实验环境来选择适当准确度的仪表。为了减小测量的相对误差,仪表的量程要接近被测量的大小。同时还要注意仪表的工作条件是否正常,使用前指针是否指零,放置位置是否正确,以及怎样正确读取数据等。

(4) 仪器误差的计算

用任何量具或仪表进行测量都会有误差,即量具或仪表的指示值与实际值之间总有一定差异。仪器误差 $\Delta_{\text{仪}}$ 一般是指在正确使用仪器的条件下,仪器的示值与被测量实际值之间可能出现的最大绝对误差。仪器误差包含系统误差和随机误差两部分,一般级别较高的仪表(如 0.2 级以上的精密仪表)仪器误差的性质主要是随机误差,包括未定系统误差。级别低的(如 1.5 级以下)或工业用仪表则主要是系统误差。一般物理实验常用仪表(如 0.5 级,1.0 级)两种误差都有,且数值相近。

仪器误差通常是由制造工厂或计量部门使用更精密的量具、仪表测试,经过检定比较后给出的。

如多次测量一个固定的被测量,测量值都相同或基本相同,这并不表示不存在随机误差,而是因为误差较小,仪器的灵敏度较低,不能反映其微小差异,这时可用仪器的最大绝对误差,即 $\Delta_{\text{仪}}$ 作为测量结果的误差。

理论分析指出,对于多数仪器误差服从均匀分布,如图 1-5 所示。所谓均匀分布,是指在其误差($\Delta_{\text{仪}}$)范围内,不同大小和符号的各种误差出现的概率都相同,区间外出现的概率为零。例如总长为 1000 mm 的钢直尺,按国家标准每毫米刻度上的允许误差为 0.05 mm,这个值在整个直尺的任何部位都可能发生,也就是说它是均匀地分布在整支直尺的所有部位。可以计算出服从均匀分布仪器的标准偏差(置信概率 68.3%)为

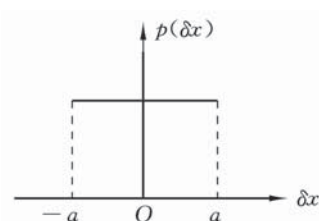


图 1-5 均匀分布

$$s_{\text{仪}} = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}} \quad (1-17)$$

对于使用准确度较高的仪器进行测量,常采用标准偏差估算误差,由于仪器误差与其它原因产生的随机误差相互独立,互不相关,因此要用“方和根”合成法计算测量结果的误差。

例 6 用 0~25 mm 的一级千分尺测量钢丝的直径 10 次,数据如下:

$d(\text{mm})$ 1.006, 1.008, 1.002, 1.001, 0.998, 1.010, 0.993, 0.995, 0.990, 0.997

已知千分尺的仪器误差为 0.004 mm,用标准偏差估算误差,完整表示测量结果。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \bar{d} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{10} (1.006 + 1.008 + 1.002 + 1.001 + 0.998 + 1.010 \\ &\quad + 0.993 + 0.995 + 0.990 + 0.997) = 1.000 \text{ mm} \end{aligned}$$

标准偏差

$$\begin{aligned} s_{\bar{d}} &= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{10(10-1)} [(0.006)^2 + (0.008)^2 + (0.002)^2 \\ &\quad + (0.001)^2 + (0.002)^2 + (0.010)^2 + (0.007)^2 + (0.005)^2 \\ &\quad + (0.010)^2 + (0.003)^2]} = 0.002 \text{ mm} \end{aligned}$$

与仪器误差合成

$$\Delta = \sqrt{s_{\bar{d}}^2 + \left(\frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{(0.002)^2 + \frac{(0.004)^2}{3}} = 0.003 \text{ mm}$$

测量结果(置信概率 $p=68.3\%$)

$$d = 1.000 \pm 0.003 \text{ mm}, \quad E_d = \frac{0.003}{1.000} = 0.3\%$$

1.4 测量不确定度和测量结果的表示

1.4.1 测量不确定度

科学实验中包括大量的测量工作,为了更加科学地表示测量结果,国际计量局(BIPM)国际标准化组织(ISO)等机构提出并制定了《实验不确定度的规定建议书 INC-1(1980)》及《测量不确定度表示指南(1993)》,规定采用不确定度来评定测量结果的质量。测量不确定度是与测量结果相关联的一个参数,用以表征合理地赋予被测量值的分散性。测量不确定度是指由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度,它是被测量的真值在某个量值范围的一个评定。或者说测量不确定度表示测量误差可能出现的范围,它的大小反映了测量结果可信赖程度的高低,不确定度小的测量结果可信赖程度高。不确定度越小,测量结果与真值越靠近,测量质量越高。反之,不确定度越大,测量结果与真值越远离,测量质量越低。不确定度包含了各种不同来源的误差对测量结果的影响,各分量的估算又反映了这部分误差所服从的分布规律。它不再将测量误差分为系统误差和随机误差,而是把可修正的系统误差修正以后,将余下的全部误差分为可以用概率统计方法计算的

A 类评定和用其它非统计方法估算的 B 类评定。在分析误差时要做到不遗漏、不增加、不重复。若各分量彼此独立,将 A 类和 B 类评定按“方和根”的方法合成得到合成不确定度。不确定度与给定的置信概率相联系,并且可以求出它的确定值。不确定度可以更全面更科学地表示测量结果的可靠性,现今在计量检测、工业等部门已逐步采用不确定度取代标准误差来评定测量结果的质量。

1.4.2 直接测量不确定度的评定和测量结果的表示

(1)(标准)不确定度的 A 类评定

A 类标准不确定度用概率统计的方法来评定。在相同的测量条件下, n 次等精度独立重复测量值为

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

其最佳估计值为算术平均值 $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1-18)$$

x_i 高斯分布的实验标准偏差 $s(x_i)$ 的估计采用贝塞尔公式

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1-19)$$

平均值 $\bar{x}$ 的实验标准偏差 $s(\bar{x})$ 的最佳估计为

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} \quad (1-20)$$

平均值的标准不确定度就用 $s(\bar{x})$ 表示。

(2)(标准)不确定度的 B 类评定

B 类标准不确定度 $u(x_j)$ 在测量范围内无法作统计评定, $u(x_j)$ 的估计信息可采用:a. 以前类似的测量数据所计算的不确定度;b. 对有关材料和仪器性能及特点的了解所估计的不确定度;c. 所用仪器的制造说明书、检定证书或手册中所提供数据的不确定度。

评定 B 类不确定度有下述几种情况:

①不确定度分布是高斯分布或近似高斯分布。如果检定证书上给出的扩展不确定度估计边界范围(相当于三倍标准差,即 $a = 3\sigma$)为 $a_- - a_+ = 2a$,则标准不确定度为 $a/3$ 。

②测量值 x_i 落在估计边界 $a_- \sim a_+$ 范围内的概率为 1,落在该范围之外的概率为零,而对于 x_i 在该范围内的概率分布又不甚了解,只能假定 x_i 在 $a_- \sim a_+$ 区间内概率都相同,即所谓的均匀分布,此时标准不确定度为 $a/\sqrt{3}$ (a 为概率分布置信区间的

半宽)。例如游标卡尺、停表等的误差,安装调整不垂直、不水平、未对准等的误差,回程误差,频率误差,数值凑整误差等。

③估计不确定度边界为 $a_- - a_+ = 2a$,虽对其分布没有确切的了解,但可近似认为该范围中点处出现 x_i 值的概率最大,离中点越远,出现 x_i 的概率越小,且近似呈线性递减,在边界处概率几乎为零,即所谓三角分布,此时标准不确定度为 $a/\sqrt{6}$ 。

(3)合成(标准)不确定度 U

对于 A 类评定和 B 类评定的合成用“方和根”法。若各不确定度分量彼此独立,则合成不确定度为

$$U = \sqrt{\sum_{i=1}^n s(x_i)^2 + \sum_{j=1}^m u(x_j)^2} \quad (1-21)$$

(4)测量结果的表示

算术平均值及合成不确定度 $x = \bar{x} \pm U$ (单位)

相对不确定度 $U_r = \frac{U}{\bar{x}} \times 100\%$

1.4.3 间接测量不确定度的评定和测量结果的表示

间接测量不确定度的评定与一般标准误差的传递计算方法相同。设间接测量量 N 与直接测量量 x_i 的函数关系为

$$N = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

式中 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 为相互独立的直接测量量。

$\bar{x}_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为各直接测量量的最佳估计值,则可证明间接测量量的最佳值为

$$\bar{N} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$$

将式(1-14)、(1-15)中的标准偏差 s_{x_i} 用合成不确定度 U_{x_i} 替代,就得到间接测量量的不确定度传递公式

$$U_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 U_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 U_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 U_{x_m}^2} \quad (1-22)$$

$$\frac{U_N}{\bar{N}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\right)^2 U_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\right)^2 U_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_m}\right)^2 U_{x_m}^2} \quad (1-23)$$

间接测量结果的表示与直接测量结果的表示形式相同,即写成

$$\begin{cases} N = \bar{N} \pm U_N & (\text{单位}) \\ U_r = \frac{U_N}{N} \times 100\% \end{cases}$$

前述讨论的置信区间为 $[-\sigma, \sigma]$,对应的置信概率为 68.3%。在工业、商业等活动中,常将合成不确定度乘以覆盖因子 k 得到扩展不确定度。对于高斯分布或近似高斯分布, $k=1.96$ 时,置信概率为 95%; $k=2.58$ 时,置信概率为 99%,对于 t 分布, $k=t_p(v)$ 。

例 7 一个铅质圆柱体,用分度值为 0.02 mm 的游标卡尺分别测其直径 d 和高度 h 各 10 次,数据如下:

d (mm) 20.42, 20.34, 20.40, 20.46, 20.44, 20.40, 20.40, 20.42, 20.38, 20.34

h (mm) 41.20, 41.22, 41.32, 41.28, 41.12, 41.10, 41.16, 41.12, 41.26, 41.22

用最大称量为 500 g 的物理天平称其质量为 $m=152.10$ g,求铅的密度及其不确定度。

解

(1) 铅质圆柱体的密度 ρ

直径 d 的算术平均值

$$\bar{d} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_i = 20.40 \text{ mm}$$

高度 h 的算术平均值

$$\bar{h} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} h_i = 41.20 \text{ mm}$$

圆柱体的质量

$$m = 152.10 \text{ g}$$

铅质圆柱体的密度

$$\rho = \frac{4m}{\pi \bar{d}^2 \bar{h}} = \frac{4 \times 152.10}{3.1416 \times 20.40^2 \times 41.20} = 1.129 \times 10^{-2} \text{ g/mm}^3$$

(2) 直径 d 的不确定度

A 类评定

$$s(\bar{d}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0.0136}{90}} = 0.012 \text{ mm}$$

B 类评定

游标卡尺的示值误差为 0.02 mm,按近似均匀分布

$$u(d) = \frac{0.02}{\sqrt{3}} = 0.012 \text{ mm}$$

d 的合成不确定度

$$U(d) = \sqrt{s(\bar{d})^2 + u(d)^2} = \sqrt{0.012^2 + 0.012^2} = 0.017 \text{ mm}$$

(3) 高度 h 的不确定度

A 类评定

$$s(\bar{h}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (h_i - \bar{h})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0.0496}{90}} = 0.023 \text{ mm}$$

B 类评定

$$u(h) = \frac{0.02}{\sqrt{3}} = 0.012 \text{ mm}$$

h 的合成不确定度

$$U(h) = \sqrt{s(\bar{h})^2 + u(h)^2} = \sqrt{0.023^2 + 0.012^2} = 0.026 \text{ mm}$$

(4) 质量 m 的不确定度

从所用天平检定证书上查得, 称量为 $1/3$ 量程时的扩展不确定度为 0.04 g , 覆盖因子 $k=3$, 接近似高斯分布

$$U(m) = \frac{0.04}{3} = 0.013 \text{ g}$$

(5) 铅密度的相对不确定度

$$\begin{aligned} \frac{U(\rho)}{\rho} &= \sqrt{\left(\frac{2U(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{U(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{U(m)}{m}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2 \times 0.017}{20.40}\right)^2 + \left(\frac{0.026}{41.20}\right)^2 + \left(\frac{0.013}{152.10}\right)^2} \\ &= \sqrt{2.8 \times 10^{-6} + 0.4 \times 10^{-6}} = 0.18\% \end{aligned}$$

$$U(\rho) = 1.129 \times 10^{-2} \times \frac{0.18}{100} = 0.002 \times 10^{-2} \text{ g/mm}^3$$

(6) 铅密度的测量结果表示为

$$\rho = (1.129 \pm 0.002) \times 10^{-2} \text{ g/mm}^3 = (1.129 \pm 0.002) \times 10^4 \text{ kg/m}^3$$

$$U_r(\rho) = 0.18\%$$

置信概率为 $p=68.3\%$ 。

1.5 有效数字及其运算

1.5.1 有效数字的一般概念

实验的基础是测量,测量的结果是用一组数字和单位表示的。如图 1-6 所示,用厘米分度(最小分格的长度是 1 cm)的尺子测量一个铜棒的长度,从尺上看出其长度大于 4 cm,再用目测估计,大于 4 cm 的部分是最

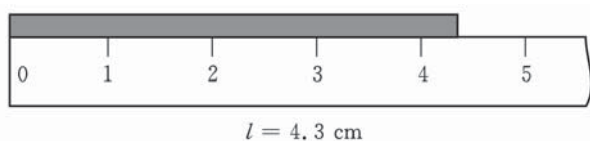


图 1-6 用厘米分度的尺子测量长度

小分度的 $\frac{3}{10}$,所以棒的长度为 4.3 cm。最末一位不同的观测者会有所不同,称为存疑数字,但它还是在一定程度上反映了客观实际。而前面的“4”是从尺子上的刻度准确读出的,即由测量仪器明确指示的,称为可靠数字。这些数字都有明确的意义,都有效地表达了测量结果,所以,我们把测量结果中所有可靠数字和一位估计的存疑数字的全体称为有效数字。有效数字的最末一位是误差所在的一位,即是有误差的数字。上面的测量结果是两位有效数字。

如果换用毫米分度的尺子测量这个棒的长度,如图 1-7 所示,可以从尺子上准确读出 4.2 cm,再估读到最小分度毫米的十分位上,测量结果为 4.25 cm。同样,最末一位的估计值不同观测者可能不同,但都是三位有效数字。由此可见,有效数字位数的多少取决于所用量具或仪器的准确度的高低。

如果被测铜棒的长度是几十厘米,那么,用厘米分度的尺子测得的结果是三位有效数字,而用毫米分度的尺子测得的是四位有效数字,所以,有效数字位数的多少还与

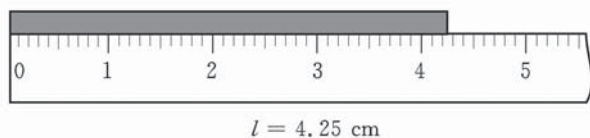


图 1-7 用毫米分度的尺子测量长度

被测量本身的大小有关。总之,有效数字位数的多少是测量实际的客观反映,不能随意增减。测量结果有效数字位数的多少与其相对误差的大小有一定的对应关系,有效数字的位数多,相对误差小,测量结果的准确度高。

如果用毫米分度的尺子测量一个棒长,恰好与 4 cm 后的第三条毫米线对齐,如图 1-8 所示,则测量结果为 4.30 cm,百分位上的“0”表示最末一位估计读数为

0,是存疑数字,这个“0”不能省去。如果写成 4.3 cm,则别人会误认为是用厘米分度的尺子测量的,十分位上的“3”是存疑数字,这与测量的实际不符。所以在物理实验

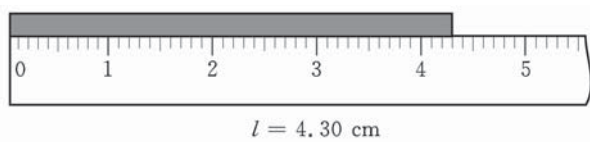


图 1-8 与毫米线对齐的读数

中 $4.30\text{ cm} \neq 4.3\text{ cm}$, 因为它们内涵是截然不同的。

对于有效数字还应该注意下列几种情况:

①有效数字中“0”的性质。非零数字前的“0”只起定位作用,不是有效数字。数字中间和数字后面的“0”都是有效数字。如果一个测得值的数很小或很大,常用标准形式来表示,即用 10 的方幂来表示其数量级,前面的数字是测得的有效数字,通常在小数点前只写一位数字,这种数值的科学表达方式称为科学计数法。例如, 0.000508 m 写成 $5.08 \times 10^{-4}\text{ m}$, 2090080 m 写成 $2.090080 \times 10^6\text{ m}$ 。这样不仅可以避免写错有效数字,而且便于定位和计算。

②十进制的单位换算不能增减有效数字位数,即有效数字的位数与小数点的位置或单位换算无关。如

$$4.30\text{ cm} = 4.30 \times 10^4\text{ }\mu\text{m} = 4.30 \times 10^{-2}\text{ m} = 4.30 \times 10^{-5}\text{ km}$$

而 $4.30\text{ cm} \neq 43000\text{ }\mu\text{m}$, 它们的量值虽然相等,但是有效数字增加了两位这就错了! $4.30\text{ cm} = 0.0430\text{ m} = 0.0000430\text{ km}$, 该式虽相等,但看起来很不直观,运算起来很不方便,所以要采用科学计数法书写。

非十进制的单位换算有效数字会有一位变化,应由误差所在位确定。如 $(1.8 \pm 0.1)\text{度} = (108 \pm 6)\text{分}$, $(1.50 \pm 0.05)\text{分} = (90 \pm 3)\text{秒}$ 等。

③纯数学数或常数,如 $\frac{1}{6}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 π 、 e 等,不是由测量得到的,有效数字可以认为是无限的,需要几位就取几位,一般取与各测得值位数最多的相同或再多取一位。给定值不影响有效数字位数。运算过程的中间结果可适当多保留几位,以免因舍入引进过大的附加误差。

④直接测量读数时应估读到仪器最小分度以下的一位(是存疑数字)。间接测量运算结果的有效数字位数由绝对误差来决定,间接测得值的末位应与绝对误差所在的一位对齐。由误差确定有效数字,是处理一切有效数字问题的基本依据。如不估算误差,则按有效数字运算规则确定有效数字位数。

1.5.2 有效数字的运算规则

实验结果一般要通过有效数字的运算才能得到,有效数字四则运算根据下述原则确定运算结果的有效数字位数:a.可靠数字间的运算结果为可靠数字;b.可靠数字与存疑数字或存疑数字间的运算结果为存疑数字,但进位为可靠数字;c.运算结果只保留一位存疑数字,其后的数字按“小于5舍,大于5入,等于5凑偶”的规则处理。

(1) 加减法

首先统一各数值的单位,然后列出纵式进行运算。为了区别在存疑数字下面划一道横线。例如

$$\begin{array}{r}
 10.\underline{1} \\
 + 4.\underline{178} \\
 \hline
 14.\underline{278} \\
 10.\underline{1} + 4.\underline{178} = 14.\underline{3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10.\underline{1} \\
 - 4.\underline{178} \\
 \hline
 5.\underline{922} \\
 10.\underline{1} - 4.\underline{178} = 5.\underline{9}
 \end{array}$$

规则是:加减运算,最后结果的存疑位应与各数中存疑数字数量级最大的一位对齐。

(2) 乘除法

例如

$$\begin{array}{r}
 4.\underline{178} \\
 \times 10.\underline{1} \\
 \hline
 4.\underline{178} \\
 4178 \\
 \hline
 42.\underline{1978} \\
 4.\underline{178} \times 10.\underline{1} = 42.\underline{2}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4.\underline{178} \\
 \times 90.\underline{1} \\
 \hline
 4.\underline{178} \\
 37602 \\
 \hline
 376.\underline{4378} \\
 4.\underline{178} \times 90.\underline{1} = 376.\underline{4}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2.\underline{417} \\
 4.\underline{178} \overline{) 10.\underline{100}} \\
 \underline{8356} \\
 17440 \\
 \underline{16712} \\
 7280 \\
 \underline{4178} \\
 31020 \\
 \underline{29246} \\
 1774 \\
 10.\underline{1} \div 4.\underline{178} = 2.\underline{42}
 \end{array}$$

规则是:乘除运算,最后结果的有效数字位数一般与各数中有效数字位数最少的相同。乘法运算,若两数首位相乘有进位时则多取一位。

(3) 乘方、开方运算

乘方、开方运算结果的有效数字位数与其底的有效数字位数相同。也可按乘除运算存疑数字划线的方法确定。例如

$$225^2 = 5.06 \times 10^4$$

$$\sqrt{225} = 15.0$$

(4) 函数运算

函数运算不能搬用四则运算规则。严格地说,函数运算结果的有效数字位数应根据误差计算来确定。在物理实验中,为了简便作如下规定:

三角函数:由角度的有效位数,即以仪器的准确度来确定,如能读到 $1'$,一般取四位有效数字。例如

$$\sin 30^\circ 00' = 0.5000$$

$$\cos 9^\circ 24' = 0.9866$$

$$\tan 45^\circ 05' = 1.003$$

对数函数:首数不计,对数小数部分的数字位数与真数的有效数字位数相同。例如

$$\ln 19.83 = 2.9872 \quad (\text{首数不计})$$

$$\lg 1.983 = 0.2973 \quad (\text{首数不计})$$

$$\lg 0.1983 = \bar{1}.2973 \quad (\text{首数不计})$$

指数函数:把 e^x 、 10^x 的运算结果用科学记数法表示,小数点前保留一位,小数点后面保留的位数与 x 在小数点后的位数相同,包括紧接小数点后的“0”。例如

$$e^{9.24} = 1.03 \times 10^4$$

$$e^{52} = 4 \times 10^{22}$$

$$10^{6.25} = 1.78 \times 10^6$$

$$10^{0.0035} = 1.0081$$

1.5.3 数字截尾的舍入规则

数字的进舍过去采用四舍五入法,这就使入的数字比舍的数字多一个,入的概率大于舍的概率,经过多次舍入,结果将偏大。为了使舍入的概率基本相同,现在采用的规则是:对保留的末位数字以后的部分,小于5则舍,大于5则入,等于5则把末位凑为偶数,即末位是奇数则加1(五入),末位是偶数则不变(五舍)。例如将下列数据取为四位有效数字,则为

$4.32749 \rightarrow 4.327;$	$3.14159 \rightarrow 3.142$
$4.32751 \rightarrow 4.328;$	$4.51050 \rightarrow 4.510$
$4.32750 \rightarrow 4.328;$	$3.12650 \rightarrow 3.126$
$4.32850 \rightarrow 4.328;$	$46.425 \rightarrow 46.42$

对于误差或不确定度的估算,其尾数的舍入规则可采用四舍五入或只进不舍。

在物理实验处理数据时,有人以为运算结果的数字位数越多越准确,其理由是一点儿都没有舍去,这种没有测量误差及有效数字概念的错误,应特别注意!

1.6 实验数据处理的常用方法

物理实验的目的是为了找出物理量之间的内在规律,或验证某种理论。实验得到的数据必须进行合理的处理分析,才能得到正确的实验结果和结论。数据处理是指从原始数据通过科学的方法得出实验结果的加工过程,它贯穿于整个物理实验教学的全过程中,应该逐步熟悉和掌握它。在一篇完整的科学论文或科研报告中,往往是先一目了然地列出各种数据,再用图线表示出物理量之间的变化关系,最后用严格的数学解析方法,如最小二乘线性回归等,得出数值上的定量关系,并给出实验结果和不确定度。物理实验常用的数据处理方法有:列表计算法,作图法,逐差法,最小二乘线性回归法等。

1.6.1 列表法

在记录和处理数据时,常把数据排列成表格,这样,既可以简单而明确地表示出被测物理量之间的对应关系,又便于及时检查和发现测量数据是否合理,有无异常情况。列表计算法就是将数据处理过程用表格的形式显示出来。即将实验数据中的自变量、因变量的各个数据及计算过程和最后结果按一定的格式,有秩序地排列出来。列表法是科技工作者经常使用的基本方法。为了养成习惯,每个实验中所记录的数据必须列成表格,因此在预习实验时,一定要设计好记录原始数据的表格。

列表的要求如下:

①根据实验内容合理设计表格的形式,栏目排列的顺序要与测量的先后和计算的顺序相对应。

②各栏目必须标明物理量的名称和单位,量值的数量级也写在标题栏中。

③原始测量数据及处理过程中的一些重要中间结果均应列入表中,且要正确表示各量的有效数字。

④要充分注意数据之间的联系,要有主要的计算公式。

列表法的优点是:简单明了,形式紧凑,各数据易于参考比较,便于表示出有关物理量之间的对应关系,便于检查和发现实验中存在的问题及分析实验结果是否合理,便于归纳总结,从中找出规律性的联系。缺点是:数据变化的趋势不够直观,求取相邻两数据的中间值时,还需要借助插值公式进行计算等。

要注意,原始数据记录表格与实验数据处理表格是有区别的,不能相互代替,原始数据表格中不必包含需进行计算的量。要动脑筋,设计出合理完整的表格。

例 8 用测量显微镜测量小钢球的直径,用列表法计算其表面积及不确定度。列表如下:

表 1-4 直径 D 的 A 类不确定度的估算

次数 n	初读数 /mm	末读数 /mm	直 径		ΔD_i $\times 10^{-3}/\text{mm}$	$(\Delta D_i)^2$ $\times 10^{-6}/\text{mm}^2$	$s_{\bar{D}}$ $\times 10^{-3}/\text{mm}$
			D_i /mm	$\bar{D}$ /mm			
1	10.441	11.437	0.996	0.997	-1	1	$s_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta D_i)^2}{n(n-1)}}$ 1.6
2	12.285	13.287	1.002		5	25	
3	15.417	16.409	0.992		-5	25	
4	18.639	19.632	0.993		-4	16	
5	21.364	22.360	0.996		-1	1	
6	25.474	26.474	1.000		3	9	
7	11.458	12.460	1.002		5	25	

表 1-5 钢球表面积的计算

表面积 S /mm ²	仪器误差 $\Delta_{\text{仪}}$ /mm	B 类不确定度 u_D $\times 10^{-3}/\text{mm}$	合成不确定度 U_D $\times 10^{-3}/\text{mm}$	$U_r = \frac{U_s}{S}$ /(%)	U_s /mm ²
$S = \pi D^2$		$u_D = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}}$	$U_D = \sqrt{s_D^2 + u_D^2}$	$\frac{U_s}{S} = \sqrt{\left(\frac{2U_D}{D}\right)^2}$	$U_s = S \cdot U_r$
3.12	0.005	2.9	3	0.6	0.02

测量结果

$$\begin{cases} S = 3.12 \pm 0.02 \text{ mm}^2 & \text{置信概率 } 68.3\% \\ U_r = 0.6\% \end{cases}$$

表 1-5 也可以用计算公式运算代替。

1.6.2 作图法

作图法是在坐标纸上用几何图形描述有关物理量之间的关系,它是一种被广泛用来处理实验数据的方法,特别是在还没有完全掌握物理量之间的变化规律或还没有找到适当函数表达式时,用作图线的方法来表示实验结果,常常是一种很方便、有效的方法。为了使图线能清晰、定量地反映出物理量的变化规律,并能从图线上准确地确定物理量值或求出有关常量,必须按照一定的规则作图。

(1) 作图规则

① 图纸选择。作图一定要用坐标纸,根据需要选用直角坐标纸、单对数或双对数坐标纸等。坐标纸的大小以不损失实验数据的有效数字和能包括全部数据为原则,也可适当选大些。图纸上的最小分格一般对应测量数据中可靠数字的最末一位。作图不要增、减有效数字位数。

② 确定坐标轴的比例和标度。通常以横轴代表自变量,纵轴代表因变量。用粗实线画出两个坐标轴,注明坐标轴代表的物理量的名称(或符号)和单位。选取适当的比例和坐标轴的起点,使图线比较对称地充满整个图纸,不要偏在一边或一角。坐标轴的起点不一定要从零开始,可选小于数据中最小值的某一整数作为起点。坐标轴的比例,即坐标分度值要便于数据点的标注和不用计算就能直接读出图线上各点的坐标,最小分格代表的数字应取 1、2、5。坐标轴上要每隔一定的相等间距标上整齐的数字。横轴与纵轴的比例和标度可以不同。

③ 标点和连线。用削尖的铅笔,以 $\odot$ 、 $\times$ 、 $+$ 、 $\triangle$ 等符号在坐标纸上准确标出数据点的坐标位置。除校正图线要连成折线外,一般应根据数据点的分布和趋势连接成细而光滑的直线或曲线。连线时要用直尺或曲线板等作图工具。图线的走向,应尽可能多地通过或靠近各实验数据点,即不是一定要通过每一个数据点,而是应使处于图线两侧的点数相近。如果一张图上要画几条图线,则要选用不同的标记符号。

④ 写图名和图注。图名的字迹要端正,最好用仿宋体,位置要显明。简要写出实验条件,必要时还要写注释或说明。

(2) 图示法与图解法

用图线表示实验结果的方法称为图示法,如用电流场模拟静电场实验用等势线、电场线图表示实验结果等。

根据画出的实验图线,用解析方法求出有关参量或物理量之间的经验公式为图解法。当图线为直线时尤为方便,如通过求直线的截距或斜率可得到另外一些物理量,如多管法测定液体动力粘度实验,通过直线的截距可得终极速度对应的时

间 t_0 ; 惠斯通电桥实验, 通过导体电阻与温度的关系直线的斜率和截距, 可求得电阻温度系数 α 等。还可通过图线求函数表达式, 如三线摆实验, 通过图线可得出三线摆周期与转动惯量之间的经验公式等。

作图示例。用伏安法测电阻的实验数据如表 1-6 所示。

表 1-6 伏安法测电阻数据

次 数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U/V	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00
I/mA	0	24	48	70	94	118	141	164	187	209

在毫米方格纸上作图线如图 1-9 所示。

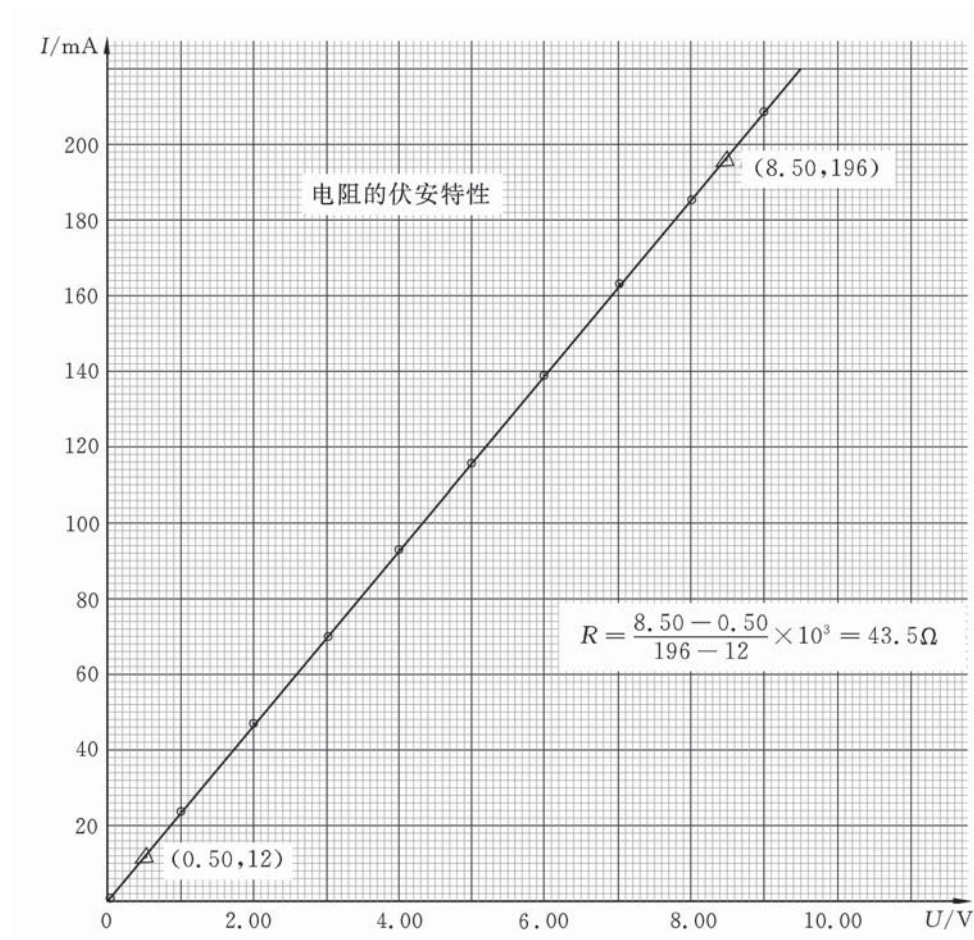


图 1-9 电阻的伏安特性图线

图 1-9 所示的伏安特性图线是一条直线,说明被测电阻是线性电阻。直线斜率的倒数就是电阻的数值。

①求直线的斜率和截距,建立直线方程。

若图线类型为直线,其方程为

$$y = kx + b \quad (1-24)$$

求斜率 k 常用两点法,要在直线两端、数据范围以内另外取两点,一般不取原始测量数据点。为了便于计算,横坐标的两数值可取为整数。用与原始数据点不同的符号标明这两个特征点的位置,旁边注明坐标值 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) ,如图 1-9 所示。直线的斜率 k 为

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1-25)$$

如果横坐标轴的起点为零,则可直接从图线上读取截距 b 的值。如果横坐标轴的起点不是零,则直线与纵轴的交点不是截距,这时常用点斜式求出,即在图线上再选取一点 (x_3, y_3) ,代入直线方程,求得

$$b = y_3 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x_3 \quad (1-26)$$

求出斜率 k 和截距 b 就可以得出具体的直线方程。也可由斜率和截距求出包含在其中的其它物理量的数值。

②通过图线求函数关系,建立经验公式。

若通过测量得到的图线是一条曲线,就要运用解析几何知识判定该曲线是哪一类函数,如果难于确定,就可凭经验假定函数形式,一般可用幂函数表示,方程为

$$y = kx^a \quad (1-27)$$

其在对数坐标系中为一线性方程,斜率为 a ,求出斜率和截距再经过反对数运算可得 k ,这样,就可得出具体的经验公式,这是了解和发现物理规律的一条有效途径。

(3)曲线改直,从而建立曲线方程

物理量之间的关系并不都是线性的,将非线性关系通过适当变量代换化为线性关系,即将非直线图形变换成直线图形称为曲线改直。由于直线最易准确绘制,更加直观,便于确定某种函数关系的曲线对应的经验公式。通过这种代换,还可使某些未知量包含在斜率或截距中,容易求出,如理查逊直线法求逸出功便是一例。

常用的可以线性化的函数举例如下。

① $y = ax^b$, a 、 b 为常量。两边取常用对数后变换为

$$\lg y = b \lg x + \lg a$$

$\lg y$ 与 $\lg x$ 为线性关系,直线的斜率为 b ,截距为 $\lg a$ 。

② $y = ae^{-bx}$, a, b 为常量。两边取自然对数后变换为

$$\ln y = -bx + \ln a$$

$\ln y - x$ 图的斜率为 $-b$,截距为 $\ln a$ 。

③ $y = a \cdot b^x$, a, b 为常量。取对数变换后

$$\lg y = \lg b \cdot x + \lg a$$

$\lg y - x$ 图的斜率为 $\lg b$,截距为 $\lg a$ 。

④ $xy = c$, c 为常量。则有

$$y = c \cdot \frac{1}{x}$$

$y - \frac{1}{x}$ 图的斜率为 c 。

⑤ $y^2 = 2px$, p 为常量。则 $y^2 - x$ 图的斜率为 $2p$ 。

⑥ $x^2 + y^2 = a^2$, a 为常量。则有

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$y^2 - x^2$ 图的斜率为 -1 ,截距为 a^2 。

⑦ $y = \frac{x}{a + bx}$, a, b 为常量。则有

$$y = \frac{1}{(a/x) + b}, \quad \frac{1}{y} = \frac{a}{x} + b$$

$\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ 图的斜率为 a ,截距为 b 。

(4) 作图法的优点和局限性

作图法的优点是数据(物理量)之间的对应关系和变化趋势非常形象、直观,一目了然,便于比较研究和发现问题,能看到测量的全貌。实验数据中存在的极值、拐点、周期性变化等,都能在图形中清楚地表示出来。特别是对很难用简单的解析函数表示的物理量之间的关系,作图表示就比较方便。另外,所作的图线有取平均的效果。通过合理的内插和外推还可以得到没有进行或无法进行观测的数据。通过求斜率、截距还可以得到另外一些物理量或建立变量之间的函数关系(经验公式)。

作图法的局限性是受图纸大小的限制,一般只能处理 $3 \sim 4$ 位有效数字。在图纸上连线有相当大的主观随意性。由于图纸本身的均匀性和准确程度有限,以及线段的粗细等,使作图不可避免地要引入一些附加误差。

1.6.3 逐差法

逐差法是数值分析中使用的一种方法,也是物理实验中常用的数据处理方

法。在所研究的物理过程中,当变量之间的函数关系呈现多项式形式时,即

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

且自变量 x 是等间距变化的,则可以采用逐差法处理数据。

逐差法是把实验测得的数据进行逐项相减,以验证函数是否是多项式关系;或者将数据按顺序分成前、后两半,后半与前半对应项相减后求其平均值,以得到多项式的系数。由于测量准确度的限制,逐差法仅用于一次和二次多项式。为了说明这种方法,仍用伏安法测电阻的实验数据,将其逐项相减及分半等间隔相减的结果列于表 1-7 中。

表 1-7 逐差法处理数据

次数 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i/V	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00
I_i/mA	0	24	48	70	94	118	141	164	187	209
$\delta_1 I = I_{i+1} - I_i/\text{mA}$	24	24	22	24	24	23	23	23	22	
$\delta_5 I = I_{i+5} - I_i/\text{mA}$	118	117	116	117	115					

表中 $\delta_1 I$ 一行是相邻两项逐项相减的结果,是一次逐差,其数值基本相等,说明电流 I 与电压 U 存在线性关系。 $\delta_5 I$ 一行是间隔五项依次相减,也是一次逐差,其平均值为

$$\overline{\delta_5 I} = \frac{1}{5}(118 + 117 + 116 + 117 + 115) = 117 \text{ mA}$$

那么电阻值为

$$R = \frac{5\delta U}{\overline{\delta_5 I}} = \frac{5 \times 1.00}{117 \times 10^{-3}} = 42.7 \Omega$$

与图解法处理数据所得结果基本相同。

函数式为 $I = \frac{1}{42.7}U$ 或 $U = 42.7I$ 。

1. 验证多项式

如果函数值逐项相减,一次逐差结果是常量时,则函数是线性函数,即

$$y = a_0 + a_1 x$$

成立。如前例伏安法测固定电阻, I 与 U 是线性函数。

如果函数值逐项相减后, 再逐项相减, 即二次逐差的结果是常量时, 则

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

成立。如自由落体运动的路程 s 与时间 t 的关系为 $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

2. 求物理量的数值

用逐差法可以求出多项式中 x 的各次项的系数来。如前例伏安法测固定电阻, 通过求自变量 U 的系数就可以得到电阻 R 的值。因为函数关系式为 $I = \frac{1}{R} U, R = \frac{1}{a_1}$ 。

需要指出, 在用逐差法求系数值时, 要计算逐差值的平均值, 这时, 不能逐项逐差, 而必须把数据分成前后两半, 后半与前半对应项逐差, 故有对数据取平均的效果。如果逐项逐差以后再平均, 则有

$$\overline{\delta_1 I} = \frac{1}{9} [(I_2 - I_1) + (I_3 - I_2) + \cdots + (I_{10} - I_9)] = \frac{1}{9} (I_{10} - I_1)$$

这里最终只用了第一个和最后一个数据, 其余中间的数据均被正负抵消, 相当于只测了两个数据, 这显然是不合理的。不仅白白浪费了测量数据, 而且会使计算结果的误差增大。

3. 逐差法的优点和局限性

逐差法的优点是方法简单, 计算方便。可以充分利用测量数据, 具有对数据取平均和减小相对误差的效果, 可以最大限度地保证不损失有效数字。可以绕过一些具有定值的未知量求出实验结果。可以发现系统误差或实验数据的某些变化规律。如果通过变量代换后能满足适用条件的要求, 也可用逐差法, 如本书光学实验部分中等厚干涉实验数据的处理。

逐差法的局限性是有较严格的适用条件: 函数必须是一元函数, 且可写成自变量的多项式形式, 如二次逐差为 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 。自变量 x 必须等间距变化, 这个条件在实验中是容易满足的, 只要使容易测量和控制的物理量呈等间距变化即可。一般测量偶数次。因求多项式的系数时, 是先得出高次项系数再逐步推出低次项系数, 由于误差的传递, 使低次项系数的准确度变差。另外, 非线性函数线性化后, 如果原来各数据是等权的, 经过函数变换以后可能成为不等权的, 这时, 用逐差法处理数据时要考虑这个因素。

1.6.4 最小二乘法与线性回归

1. 最小二乘法

最小二乘法是一种解决怎样从一组测量值中寻求最可靠值,也就是最可信赖值的方法。对于等精度测量,所得数据的测量误差是无偏的(无粗差,也排除了测量的系统误差),服从高斯分布,且相互独立,则测量结果的最可靠值是各次测量值相应的偏差平方和为最小时的那个值,即算术平均值。因为最可靠值是在各次测量值的偏差平方和为最小的条件下求得的,当时(18 世纪初)把平方叫二乘,故称最小二乘法。最小二乘法是以误差理论为依据的严格、可靠的方法,有准确的置信概率。按最小二乘法处理测量数据能充分地利用误差的抵偿作用,从而可以有效地减小随机误差的影响。

2. 回归分析

相互关联的变量之间的关系可以分成两类。一类是变量之间存在着完全确定的关系,叫做函数关系;一类是变量之间虽然有联系,但由于测量中随机误差等因素的存在,造成了变量之间联系的不同程度的不确定性,但从统计上看,它们之间存在着规律性的联系,这种关系叫做相关关系。相关变量间既有相互依赖性,又有某种不确定性。回归分析法是处理变量间相关关系的数理统计方法。回归分析就是通过对一定数量的观测数据所作的统计处理,找出变量间相互依赖的统计规律。如果存在相关关系,就要找出它们之间的合适的数学表达式。由实验数据寻找经验方程称为方程的回归或拟合,方程的回归就是要用实验数据求出方程的待定系数。在回归分析中为了估算出经验方程的系数,通常利用最小二乘法。得到经验方程后,还要进行相关显著性检验,判定所建立的经验方程是否有效。回归分析所用的数学模型主要是线性回归方程,因为其它形式的数学模型多数可以通过数学变换转化为线性回归方程。根据相关变量的多少,回归分析又可分为一元回归和多元回归。回归法处理数据的优点在于理论上比较严格,在函数形式确定后,结果是唯一的,不会像作图法那样因人而异。

3. 用最小二乘法进行一元线性回归(直线拟合)

(1) 回归方程系数的确定

一元线性回归方程为

$$y = a_0 + a_1 x \quad (1-28)$$

最小二乘法一元线性回归的原理是:若能找到一条最佳的拟合直线,那么各测量值与这条拟合直线上各对应点的值之差的平方和,在所有拟合直线中应该是最小的。利用最小二乘法就是要由一组实验数据 $x_i, y_i (i=1, 2, \dots, k)$ 找出一条最佳的拟合

直线来,也就是要求出回归方程的系数 a_0 和 a_1 的值。

在经典的回归分析中,总是假定:

①自变量 x_i 不存在测量误差,是准确的;

②因变量 y_i 是通过等精度测量得到的只含有随机误差的测得值,误差服从高斯分布;

③在 y_i 的测得值中,粗大误差和系统误差已被排除。

在实际应用时,要把相对来说误差较小的变量作为自变量,实验过程中不要改变测量方法和条件,如果测量中存在粗差,首先进行剔除,存在系统误差要对测得值进行修正。这样就能满足上述假定的要求。

式(1-28)表示的是一条直线,如图1-10所示,由于 y_i 存在测量误差,实验点不可能全部重合在该直线上。对于与某个 x_i 相对应的测量值 y_i ,与用回归法求得的直线式(1-28)在 y 方向上的偏差为

$$\epsilon_i = y_i - y = y_i - (a_0 + a_1 x_i) \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (1-29)$$

ϵ_i 的正负和大小表示实验点在直线两侧的离散程度。 ϵ_i 的值与 a_0 、 a_1 的取值有关。为使偏差的正值和负值不发

生抵消,且考虑到全部实验值的贡献,根据最小二乘法原理,应当计算 $\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2$ 的大小。如果 a_0 和 a_1 的取值使 $\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2$ 最小,将 a_0 和 a_1 的值代入式(1-28),就得到这组测量数据所拟合的最佳直线。

由式(1-29)得

$$\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \quad (1-30)$$

为求其最小值,把式(1-30)分别对 a_0 、 a_1 求一阶偏导数,并令其等于零,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_0} \left(\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 \right) &= -2 \sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 \right) &= -2 \sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

整理后写成

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} a_1 + a_0 &= \bar{y} \\ \bar{x}^2 a_1 + \bar{x} a_0 &= \overline{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

式(1-32)中

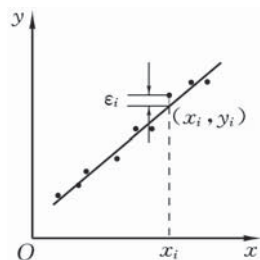


图1-10 线性拟合

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \\ \bar{y} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i \\ \overline{x^2} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2 \\ \overline{xy} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

式(1-32)的解为

$$a_1 = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (1-34)$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} \quad (1-35)$$

可以证明, $\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2$ 对 a_0 、 a_1 的二阶偏导数均大于零, 说明由式(1-34)和式(1-35)计算出的 a_1 和 a_0 对应于 $\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2$ 的极小值, 也就是拟合的最佳直线的斜率和截距的估计值。

为了计算和书写方便, 引入符号

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^2 \\ L_{yy} &= \sum_{i=1}^k y_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k y_i \right)^2 \\ L_{xy} &= \sum_{i=1}^k x_i y_i - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) \left(\sum_{i=1}^k y_i \right) \end{aligned}$$

于是式(1-34)可表示为

$$a_1 = \frac{L_{xy}}{L_{xx}} \quad (1-36)$$

由式(1-32)可以看出, 最佳直线通过 $(\bar{x}, \bar{y})$ 点, 因此, 在用作图法画直线时, 应将 $(\bar{x}, \bar{y})$ 坐标点标出, 将作图用的直尺以这点为轴心来回转动, 直到各数据点与直尺边线的距离最近, 而且左右分布匀称为止。这时, 沿此边线用铅笔画一直线, 即为所求的最佳直线。

(2) a_1 和 a_0 的标准偏差

因为 y_i 含有较明显的随机误差, 导致由式(1-34)和式(1-35)计算出的 a_1 和

a_0 也含有误差。 y_i 的标准偏差 s 为

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}{k-2}} \quad (1-37)$$

需要注意,式(1-37)根式中分母是 $k-2$,其意义是在两个变量(x_i, y_i)的情况下,有两个方程就可以解出结果,现在多了 $k-2$ 个方程,所以自由度是 $k-2$,有两个自由度受约束。也可以理解为有两个数据点就可以确定一条直线,这两点的 $\epsilon_i=0$,现在有 k 个数据点,其自由度当然是 $k-2$ 了。

由误差传递公式可以导出 a_1 和 a_0 的标准偏差 s_{a_1} 和 s_{a_0}

$$s_{a_1} = \frac{s}{\sqrt{k(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}} = \frac{s}{\sqrt{L_{xx}}} \quad (1-38)$$

由式(1-38)可知, s_{a_1} 不仅与 s 有关,还与 L_{xx} 的大小有关。 L_{xx} 的大小反映了 x_i 间距的大小, L_{xx} 大, x_i 的间距大,取值分散范围较大;反之, x_i 取值比较集中,取值范围比较小。为了提高 a_1 的准确度,在实验条件允许的情况下,应当尽量增大 x_i 的取值范围。

$$s_{a_0} = \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{L_{xx}}} \cdot s = \sqrt{\overline{x^2}} \cdot s_{a_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2}{k}} \cdot s_{a_1} \quad (1-39)$$

式(1-39)表明, a_1 的标准偏差直接影响 a_0 的标准偏差,且 x_i 的数值越大,这种影响越严重。就是说,在 s_{a_1} 相同时, x_i 离坐标原点越远,截距 a_0 的标准偏差越大。

如果 $s_{a_0} > a_0$,即 a_0 的标准偏差的数值大于截距的数值,便可以认为在一定程度上(对高斯分布置信概率为 68.3%)拟合的直线通过坐标原点。

(3) 线性相关系数

为了定量描述 x, y 变量之间线性相关程度的好坏,引入相关系数 r ,其定义为

$$r = \frac{L_{xy}}{\sqrt{L_{xx}L_{yy}}} \quad (1-40)$$

与式(1-36)比较,因 $\sqrt{L_{xx}L_{yy}} > 0$,故 r 与 a_1 的符号相同。即 $r > 0$,则 $a_1 > 0$,拟合直线的斜率为正; $r < 0$,则 $a_1 < 0$,其斜率为负。可以证明, $|r|$ 的值在 0 到 1 之间。若 $r=0$,表示 x, y 之间完全没有线性相关的关系,即用线性回归不妥,应该换用其它函数重新试探。 $|r|=1$,表示 x_i 与 y_i 全部都在拟合直线上,即完全相关。

图 1-11 表示 r 取不同数值时数据点的分布情况。需要说明的是图 1-11(e)所示的情况,实验点呈开口向上的抛物线状,说明 y 是 x 的二次函数,但相关系数却为零。所以线性相关系数 r 只表示变量间线性相关的程度,并不表示 x, y 之间是否存在其它相关关系。

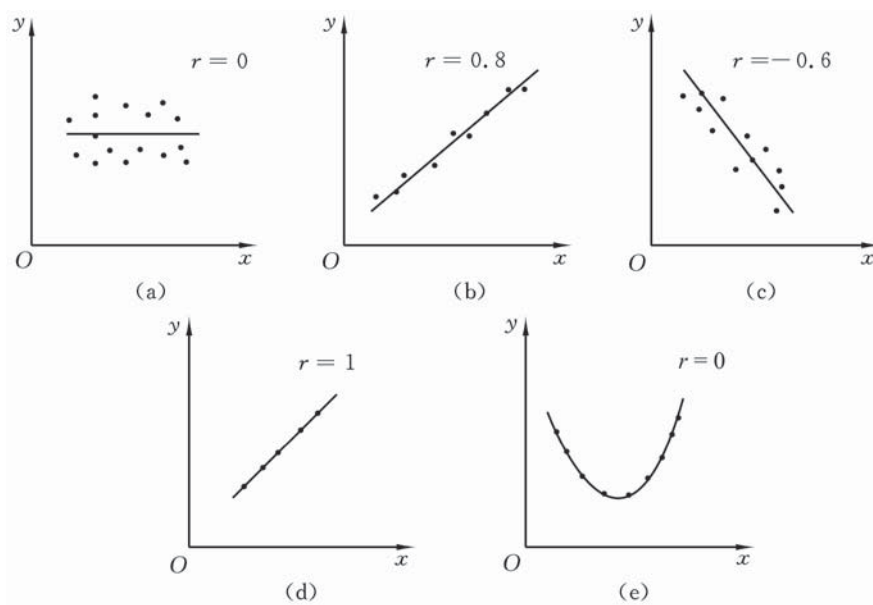


图 1-11 不同相关系数的数据点分布图

为了实际使用的方便,可导出

$$s = \sqrt{\frac{(1-r^2)L_{yy}}{k-2}} \quad (1-41)$$

$$\frac{s_{a_1}}{a_1} = \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{k-2}} \quad (1-42)$$

式(1-42)表示由 r 及 k 就可以方便地确定拟合直线斜率的相对偏差。

对于一个实际问题,只有当 $|r|$ 大于某一数值时,方能认为变量之间存在着线性相关关系。因而需要给出一个检验标准,记作 r_0 。当 $|r| > r_0$ 时,变量间线性相关的程度是显著的。数理统计理论指出, r_0 的大小与实验数据的个数 k 和显著性水平 α 的值有关。 $\alpha=0.05$ 表示将线性相关关系判断错误的概率为 5%。 α 越小,显著性标准就越高,表 1-8 列出了 $\alpha=0.05$ 和 $\alpha=0.01$ 两种情况下 r_0 的数值。

表 1-8 相关系数检验表

$\begin{matrix} r_0 \\ \alpha \\ k-2 \end{matrix}$	0.05	0.01	$\begin{matrix} r_0 \\ \alpha \\ k-2 \end{matrix}$	0.05	0.01
1	0.997	1.000	16	0.468	0.590
2	0.950	0.990	17	0.456	0.575
3	0.898	0.959	18	0.444	0.561
4	0.811	0.917	19	0.433	0.549
5	0.754	0.874	20	0.423	0.537
6	0.707	0.834	25	0.381	0.487
7	0.666	0.798	30	0.349	0.449
8	0.632	0.765	35	0.325	0.418
9	0.602	0.735	40	0.304	0.393
10	0.576	0.708	50	0.273	0.354
11	0.553	0.684	60	0.250	0.325
12	0.532	0.661	70	0.232	0.302
13	0.514	0.641	80	0.217	0.283
14	0.497	0.623	100	0.195	0.254
15	0.482	0.606	200	0.138	0.181

(4)应用举例

例 9 在测定金属导体电阻温度系数的实验中,得到如下测量数据:

$t/^{\circ}\text{C}$	24.8	37.0	40.9	45.2	49.0	56.1	61.0	65.8	70.0	74.9	80.6	85.4
R/Ω	38.83	40.83	41.42	42.26	42.63	43.74	44.44	45.10	45.79	46.45	47.44	48.11

用线性拟合法计算 a_1 和 a_0 的值; s_{a_1} 和 s_{a_0} 的值;电阻温度系数 α 和 0°C 时的电阻 R_0 的值;相关系数 r 的值;写出直线方程,评价相关程度。

解 金属导体的电阻与温度的关系为

$$R=R_0(1+\alpha t)$$

式中 R_0 是 0°C 时的电阻; α 是电阻温度系数。从测量数据可以看出, R 是四位有效数字, t 是三位有效数字, R 的测量准确度较高,根据回归分析的假定要求, R 应作为自变量,上式改写为

$$t = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha R_0} R$$

用 x_i, y_i 分别表示 R, t 的测量值, 根据一元线性回归的计算方法, 编制程序, 由计算机运算处理, 现将主要结果抄录如下:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 43.92, & \bar{y} &= 57.56, & \overline{x^2} &= 1936 \\ L_{xx} &= 87.67, & L_{yy} &= 3843, & L_{xy} &= 580.1 \\ a_1 &= 6.618, & a_0 &= -233.1 \\ s_{a_1} &= 0.063, & s_{a_0} &= 2.8, & r &= 0.9995\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_1 &= 6.62 \pm 0.06, & a_0 &= -(233 \pm 3) \\ \alpha &= -\frac{1}{a_0} = 4.29 \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}, & R_0 &= -\frac{a_0}{a_1} = 35.2 \, \Omega\end{aligned}$$

根据误差传递的“方和根”合成法, α 和 R_0 的标准偏差分别为

$$\begin{aligned}s_\alpha &= \alpha \frac{s_{a_0}}{|a_0|} = 5.1 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \\ s_{R_0} &= R_0 \sqrt{\left(\frac{s_{a_0}}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{s_{a_1}}{a_1}\right)^2} = 0.53 \, \Omega\end{aligned}$$

α 的 R_0 的测量结果为

$$\begin{aligned}\alpha &= (4.29 \pm 0.05) \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}, & E_\alpha &= 1\% \\ R_0 &= 35.2 \pm 0.5 \, \Omega, & E_{R_0} &= 1.4\%\end{aligned}$$

直线方程为

$$R = 35.2 \times (1 + 4.29 \times 10^{-3} t)$$

取判断的显著性水平为 0.01, $k=12$, 查表 1-8 得 $r_0=0.708$, $r > r_0$, 说明线性相关程度很高。

习 题

1. 下列各量是几位有效数字:

- (1) 地球平均半径 $R = 6371.22 \, \text{km}$;
- (2) 地球到太阳的平均距离 $s = 1.496 \times 10^8 \, \text{km}$;
- (3) 真空中的光速 $c = 299792458 \, \text{m/s}$;
- (4) $l = 0.0004 \, \text{cm}$;
- (5) $T = 1.0005 \, \text{s}$;

(6) $E = 2.7 \times 10^{25} \text{ J}$;

(7) $\lambda = 339.223140 \text{ nm}$;

(8) $d = 0.08080 \text{ m}$ 。

2. 按有效数字运算规则计算下列各式:

(1) $343.37 + 75.8 + 0.6386 =$

(2) $88.45 - 8.180 - 76.54 =$

(3) $6.92 \times 10^5 - 5.0 + 1.0 \times 10^2 =$

(4) $91.2 \times 3.7155 \div 1.0 =$

(5) $(8.42 + 0.052 - 0.47) \div 2.001 =$

(6) $\pi \times 3.001^2 \times 3.0 =$

(7) $(100.25 - 100.23) \div 100.22 =$

(8) $\frac{50.00 \times (18.30 - 16.3)}{(103 - 3.0) \times (1.00 + 0.001)} =$

3. 单位变换:

(1) $m = 1.750 \pm 0.003 \text{ kg}$, 写成以 g、mg、t(吨) 为单位;

(2) $h = 8.54 \pm 0.04 \text{ cm}$, 写成以 μm 、mm、m、km 为单位;

(3) $t = 1.8 \pm 0.1 \text{ 分}$, 写成以秒为单位。

4. 按照有效数字运算规则和误差理论改正错误:

(1) $2000 \text{ mm} = 2 \text{ m}$;

(2) $1.25^2 = 1.5625$;

(3) $V = \frac{1}{6} \pi d^3 = \frac{1}{6} \pi (6.00)^3 = 1 \times 10^2$;

(4) $\frac{400 \times 1500}{12.60 - 11.6} = 600000$;

(5) $d = 10.435 \pm 0.02 \text{ cm}$;

(6) $L = 12 \text{ km} \pm 100 \text{ m}$;

(7) $T = 85.00 \pm 0.35 \text{ s}$;

(8) $Y = (1.94 \times 10^{11} \pm 5.79 \times 10^9) \text{ N/m}^2$ 。

5. 指出下列情况是系统误差还是随机误差:

(1) 千分尺零点不准;

(2) 游标的分度不均匀;

(3) 水银温度计毛细管不均匀;

(4) 忽略空气浮力对称量的影响;

- (5) 非不良习惯引起的读数误差;
- (6) 电表的接入误差;
- (7) 电源电压不稳定引起的测量值起伏;
- (8) 磁电系电表永久磁铁的磁场减弱。

6. 计算下列数据的算术平均值、标准偏差及平均值的标准偏差,正确表达测量结果(包括计算相对误差)。

- (1) $l_i(\text{cm})$: 3.4298, 3.4256, 3.4278, 3.4190, 3.4262, 3.4234, 3.4263, 3.4242, 3.4272, 3.4216;
- (2) $t_i(\text{s})$: 1.35, 1.26, 1.38, 1.33, 1.30, 1.29, 1.33, 1.32, 1.32, 1.34, 1.29, 1.36;
- (3) $m_i(\text{g})$: 21.38, 21.37, 21.37, 21.38, 21.39, 21.35, 21.36。

7. 改写成正确的误差传递式(算术合成法):

- (1) $E = \frac{4\rho l^3}{\lambda ab^3}$, $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l^3} - \frac{\Delta \lambda}{\lambda} - \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b^3}$;
- (2) $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, $\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2}\pi \frac{\Delta d}{d}$;
- (3) $N = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y^3$, $\Delta N = \Delta x + 3\Delta y$;
- (4) $\eta = \frac{(\rho - \rho_0)gd^2}{18v_0}$, $\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} + \frac{\Delta g}{g} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta v_0}{v_0}$;
- (5) $N = x^2 - 2xy + y^2$, $\Delta N = 2\Delta x + 2\Delta x\Delta y + 2\Delta y$;
- (6) $L = b + \frac{d}{D^2}$, $\Delta L = \Delta b + \Delta d + \frac{1}{2}\Delta D$;
- (7) $R = \sqrt[n]{x}$, $\frac{\Delta R}{R} = n \frac{\Delta x}{x}$;
- (8) $N = k \sin x$, $\Delta N = \Delta k + \tan x$ 。

8. 求出下列函数的算术合成法误差传递式(等式右端未经说明者均为直接测得量,绝对误差或相对误差任写一种)。

- (1) $N = x + y - 2z$;
- (2) $Q = \frac{k}{2}(A^2 + B^2)$, k 为常量;
- (3) $N = \frac{1}{A}(B - C)D^2 - \frac{1}{2}F$;
- (4) $f = \frac{ab}{a - b}$, ($a \neq b$)
- (5) $f = \frac{A^2 - B^2}{4A}$;
- (6) $I_2 = I_1 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$;
- (7) $V_0 = \frac{V}{\sqrt{1 + \alpha t}}$, α 为常量;
- (8) $n = \frac{\sin i}{\sin r}$ 。

9. 改正标准偏差传递式中的错误:

$$(1) \quad L = b + \frac{1}{2}d, \quad s_L = \sqrt{s_b^2 + \frac{1}{2}s_d^2};$$

$$(2) \quad L_0 = \frac{L}{1 + \alpha t}, \quad \alpha \text{ 为常量}, \quad \frac{s_{L_0}}{L_0} = \sqrt{\left(\frac{s_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\alpha s_t}{1}\right)^2};$$

$$(3) \quad \nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{mgl_0}{m_0}}, \quad g \text{ 为常量}, \quad \frac{s_\nu}{\nu} = \sqrt{\left(\frac{s_L}{L}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{s_{l_0}}{l_0}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{s_{m_0}}{m_0}\right)^2}.$$

10. 计算下列各式的结果,并用算术合成法估算误差。

$$(1) \quad N = A + B - \frac{1}{3}C, \quad A = 0.5768 \pm 0.0002 \text{ cm};$$

$$B = 85.07 \pm 0.02 \text{ cm} \quad C = 3.247 \pm 0.002 \text{ cm};$$

$$(2) \quad V = 1000 \pm 1 \text{ cm}^3, \text{ 求 } \frac{1}{V} = ?$$

$$(3) \quad R = \frac{a}{b}x, \quad a = 13.65 \pm 0.02 \text{ cm},$$

$$b = 10.871 \pm 0.005 \text{ cm}, x = 67.0 \pm 0.8 \Omega;$$

$$(4) \quad \nu = \frac{h_1}{h_1 - h_2}, \quad h_1 = 45.51 \pm 0.02 \text{ cm}, \quad h_2 = 12.20 \pm 0.02 \text{ cm}$$

11. 用一级千分尺(示值误差为 $\pm 0.004 \text{ mm}$) 测量某物体的厚度 10 次,数据为: 14.298, 14.256, 14.278, 14.290, 14.262, 14.234, 14.263, 14.242, 14.272, 14.216 (mm)。求厚度及其不确定度,正确表示测量结果。

12. 利用单摆测定重力加速度 g , 当摆角很小时有 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ 的关系。式中 T 为周期, l 为摆长, 它们的测量结果分别为 $T = 1.9842 \pm 0.0002 \text{ s}$, $l = 98.81 \pm 0.02 \text{ cm}$, 求重力加速度及其不确定度,正确表示测量结果。

13. 已知某空心圆柱体的外径 $D = 3.800 \pm 0.004 \text{ cm}$, 内径 $d = 1.482 \pm 0.002 \text{ cm}$, 高 $h = 6.276 \pm 0.004 \text{ cm}$, 求体积 V 及其不确定度,正确表示测量结果。

讨论题

1. 测量结果都存在误差的原因是什么?
2. 服从高斯分布的随机误差有哪些统计规律?
3. 单次测量结果如何表示?
4. 如何计算多次等精度测量的标准偏差及平均值的标准偏差?

5. 如何推导误差传递公式?
6. 如何发现实验中存在系统误差? 怎样消除或减小系统误差? 举例说明。
7. 什么是仪器的灵敏度?
8. 测量不确定度如何分类? 直接测量的不确定度如何估算? 怎样合成?
9. 间接测量不确定度的传递公式如何求得?
10. 如何正确完整表示测量结果?
11. 什么是有效数字? 直接测量结果有效数字位数的多少与什么有关?
12. 使用有效数字要注意些什么?
13. 数字截尾的舍入规则是怎样规定的?
14. 列表法处理数据有哪些要求?
15. 实验作图有哪些要求? 怎样求直线的斜率和截距?
16. 如何用逐差法求物理量的数值? 举例说明。
17. 用最小二乘法进行一元线性回归的原理是什么?
18. 以 mm 为单位表示下列各值:
2.48 m, 0.01 m, 5 cm, 30 μm 。
19. 下列测量记录中哪些是正确的?
 - (1) 用分度值为 mm 的钢直尺测量物体的长度:
3.2cm, 40cm, 78.86cm, 80.00cm, 4.05cm。
 - (2) 用分度值为 0.02 mm 的游标卡尺测量物体的长度:
40mm, 31.05mm, 50.6mm, 23.06mm, 40.00mm。
 - (3) 用分度值为 0.01 mm 的螺旋测微计测量物体的长度:
0.45 cm, 0.5 cm, 0.317 cm, 0.0236 cm, 0.1020 cm
 - (4) 用分度值为 0.1 $^{\circ}\text{C}$ 的温度计测量物体温度:
27 $^{\circ}\text{C}$, 40.0 $^{\circ}\text{C}$, 26.50 $^{\circ}\text{C}$, 18.73 $^{\circ}\text{C}$, 40.00 $^{\circ}\text{C}$ 。
 - (5) 用分度值为 0.05 A 量程为 5 A 的 1.0 级电流表测量电流强度:
2.0 A, 1.45 A, 1.785 A, 0.601 A, 2.90 A。
20. 将下列各数据截取为四位有效数字:
 - (1) $\pi = 3.14159265$;
 - (2) $e = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{C}$;
 - (3) $1^{\circ} = 0.01745329 \text{ rad}$;
 - (4) $1 \text{ rad} = 57.297795$;
 - (5) $c = 299792458 \text{ m/s}$;
 - (6) $l = 2.3755 \text{ m}$;
 - (7) $m = 1470.0 \text{ kg}$;
 - (8) $t = 6.28159 \text{ s}$;
 - (9) $\lambda = 1799.501 \text{ nm}$;
 - (10) $W = 0.732249 \text{ t}$;

(11) $U = 43.485 \text{ V}$;

(12) $R = 21.495 \Omega$ 。

21. 三人用同一游标卡尺分别测量一铜棒的直径,各人所得结果表达如下:

(1) $d = 2.380 \pm 0.002 \text{ cm}$;

(2) $d = 2.38 \pm 0.002 \text{ cm}$;

(3) $d = 2.4 \pm 0.002 \text{ cm}$ 。

哪个人表示的测量结果正确?用的是多少分度的游标卡尺?

22. 用螺旋测微计测量一钢球的直径,所得的结果表示为: $1.2832 \pm 0.0002 \text{ cm}$,
 $1.283 \pm 0.002 \text{ cm}$, $1.28 \pm 0.0002 \text{ cm}$, $1.3 \pm 0.2 \times 10^{-3} \text{ cm}$,哪组结果表示正确?

23. 某棒长 1.674 m ,截去 8.00 cm ,剩下多少 mm 长?

24. 三个测量数据 5.83 cm 、 5.83 dm 、 5.83 mm 相加的结果等于多少?

25. 电阻 $R_1 = 5.10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5.10 \times 10^2 \Omega$, $R_3 = 51 \Omega$,串联后总电阻 $R = ?$

26. 在 $1.50 \text{ k}\Omega$ 电阻两端加电压 1.5 V ,电流为多少安培?

27. 如有系统误差存在,测量值有什么特征? 由于随机误差的存在,测量值又有什么特征?

28. 为什么在使用游标卡尺、螺旋测微计时首先要查看零点读数? 为什么许多仪器在使用前要调整或检查水平、垂直状态?

29. 下述说法是否正确? 为什么?

(1) 有人说 $8 \times 10^{-5} \text{ g}$ 比 8.0 g 测得准确;

(2) 用天平称衡采用复称法是为了减小随机误差,所以取左称右称质量的平均值作为测量结果,即

$$m = \frac{1}{2}(m_{\text{左}} + m_{\text{右}})$$

30. 比较下列三个量的误差哪个大。

(1) $l_1 = 54.98 \pm 0.02 \text{ cm}$;

(2) $l_2 = 0.498 \pm 0.002 \text{ cm}$;

(3) $l_3 = 0.0098 \pm 0.0002 \text{ cm}$ 。

31. 有人将测量结果表示为

$$\bar{D} = 2.345 \text{ m},$$

$$\Delta D = 0.123 \text{ m}$$

$$D = 2.345 \pm 0.123 \text{ m}$$

$$E = 5.25\%$$

有无错误? 错在哪里? 如何正确表达?

32. 读出图 1-12 中的测量值,写出包括不确定度的测量结果。

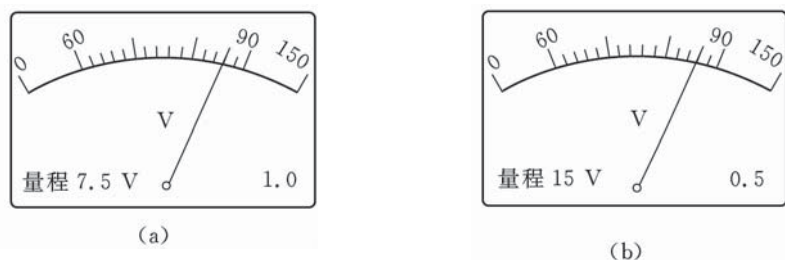


图 1-12 电表读数

33. 用物理天平称衡某物体的质量,多次读数均为 34.56 g,这是否说明此称衡不存在误差?

34. 测量钠光灯发出的黄光谱线的波长,多次测量后得到波长的平均值为 589.3 nm,与此谱线的标准值相同,能否说明此次测量结果的误差为零?为什么?

35. 用停表测量单摆的周期,每次累计 40 个周期,测量结果为: $(40T) = 36.04 \pm 0.02$ s,求周期 $T = ?$

36. 有人用停表测量单摆的周期,测一个周期为 1.9 s,测连续 10 个周期累计时间为 19.3 s,测连续 100 个周期累计时间为 192.8 s。在分析周期的误差时,他认为用的是同一只停表,又都是单次测量,因此,上述各次测得的周期的误差均为 0.2 s,你的意见如何?理由是什么?

37. 某电阻的测量结果为

$R = 35.78 \pm 0.05 \Omega$, $E = 0.14\%$ (置信概率 $p = 68.3\%$),下列各种解释哪些是正确的?

- (1) 被测电阻值是 35.73 Ω 或 35.83 Ω ;
- (2) 被测电阻值在 35.73 Ω 到 35.83 Ω 之间;
- (3) 被测电阻的真值包含在区间 $[35.73, 35.83] \Omega$ 内的概率是 68.3%;
- (4) 用 35.78 Ω 近似地表示被测电阻值时,测量误差的绝对值小于 0.05 Ω 的概率为 68.3%;
- (5) 若对该电阻值在同样测量条件下重复测量 1000 次,有 683 次测量值落在 35.73 ~ 35.83 Ω 范围内。

38. 指出下列哪几个误差传递公式是正确的。 $N = x - \frac{1}{2}y^3$, 用误差的算术合成法计算。

- (1) $\Delta N = \Delta x - \frac{1}{2}y^2 \Delta y$;
- (2) $\Delta N = \Delta x + \frac{1}{2}y^2 \Delta y$;

$$(3) \quad \Delta N = \Delta x + \frac{3}{2}y^2 \Delta y;$$

$$(4) \quad \Delta N = \Delta x + \frac{3}{2} \Delta y;$$

$$(5) \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{3}{2} \frac{\Delta y}{y};$$

$$(6) \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x} + 3 \frac{\Delta y}{y};$$

$$(7) \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x + \frac{3}{2}y^2 \Delta y}{x - \frac{1}{2}y^3};$$

$$(8) \quad \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x + \frac{3}{2}y^2 \Delta y}{x + \frac{1}{2}y^3}.$$

39. 已知 $m = 2.000 \pm 0.002 \text{ g}$, 求 $\frac{1}{m} = ?$ $\sqrt{m} = ?$

40. 图 1-13 所示的几幅图中在哪些地方不符合要求? 请改正之。

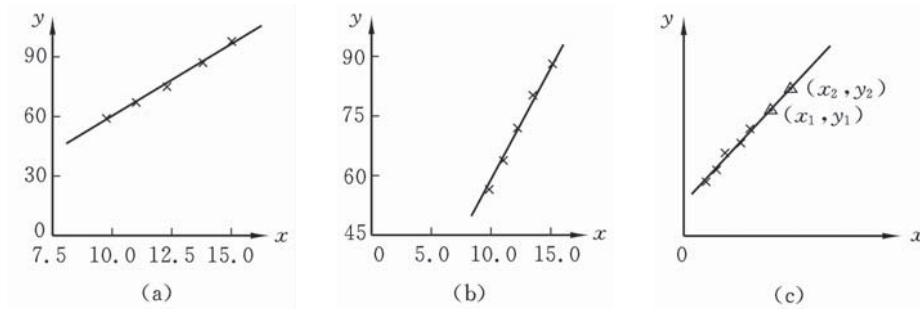


图 1-13 需改正的图线

41. 用一级千分尺测量钢珠的直径 d 七次, 数据如下:

d (mm) 12.836 12.838 12.834 12.837 12.835 12.837 12.836

求钢珠的体积及其不确定度, 正确写出测量结果。

42. 用流体静力称衡法测定一固体的密度, 物体在空气中称得 $m = 26.77 \pm 0.02 \text{ g}$, 物体在水中称得 $m_1 = 16.03 \pm 0.02 \text{ g}$, 已知水在测量时的密度为 $\rho_0 = 0.99867 \text{ g/cm}^3$, 其误差可略去, 试用 $\rho = \frac{m}{m - m_1} \rho_0$ 计算物体的密度及其不确定度。

43. 用伏安法测电阻数据如下:

I/mA	0.00	2.00	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00	20.00	22.00
U/V	0.00	1.00	2.01	3.05	4.00	5.01	5.99	6.98	8.00	9.00	9.96	11.02

试分别用列表法、作图法、逐差法、线性回归法求出函数关系式及电阻值。